

Théorie quantique relativiste et introduction à la théorie des champs

Notes relatives au cours de Physique Mathématique I

Première licence en sciences physiques

ULB - Service de Physique Théorique

Année Académique 2005-2006

Table des matières

Introduction	4
1 Les transformations de Lorentz et leurs représentations	6
1.1 Représentation de définition de $O(3,1)$	7
1.2 Transformations infinitésimales	9
1.3 Commutateurs	11
1.4 Générateurs-Relations de commutation	11
1.5 Le groupe $SU(2)$ et sa relation aux rotations à 3 dimensions	14
1.5.1 Représentation de définition de $SU(2)$	15
1.5.2 Quelques représentations de $SU(2)$	16
1.6 Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ et sa relation au groupe de Lorentz	20
1.6.1 Liens avec le groupe de Lorentz	22
1.6.2 Spineurs de Dirac et représentation chirale des matrices γ^μ	23
2 Equation de Dirac	26
2.1 Solution en ondes planes	28
2.2 Quelques remarques concernant les matrices de Dirac	32
3 Introduction à la théorie quantique des champs	33
3.1 Théorie classique	33
3.1.1 <u>Rappels</u> : Lagrangien et Action pour un point matériel	33
3.1.2 Généralisation	34
3.1.3 Passage au continu	34
3.2 Exemples de Lagrangiens Relativistes	37
3.3 Développement des champs et opérateurs de création/annihilation	37
3.4 Quantification et relation spin-statistique	41
3.4.1 Tenseur d'énergie impulsion	41

3.4.2	Pour rappel : oscillation harmonique	43
3.4.3	Energie et quantification de champ scalaire	44
3.4.4	Exercices	46
3.4.5	Energie et quantification du champ spinoriel	47
3.4.6	Courant de charge	48

Remarque

Ces notes sont, au mieux, un résumé des points importants du cours. Elles ne prétendent remplacer ni le cours oral, ni les séances d'exercices, ni le recours aux ouvrages de référence.

Références

De nombreuses références existent sur le sujet. Attention : les conventions diffèrent souvent. Nous utilisons fréquemment :

- Peskin et Schroeder (Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley Publishing company, 1995)
- Bilenky (S.M. Bilenky, Basics of introduction to Feynman diagrams and Electroweak interactions physics, Editions frontieres, 1994)

Il est utile de consulter d'autres ouvrages : récents (Weinberg, Dewit) ou plus anciens (Landau, Bjorken et Drell).

Introduction

Avant d'aborder le formalisme, posons brièvement le problème. Deux théories, nées au début du XXème siècle, à savoir la Relativité et la Mécanique Quantique, doivent s'unifier. Plus précisément, il s'agit ici d'inscrire la Mécanique Quantique dans un cadre et un formalisme relativiste.

La difficulté naît du caractère asymétrique entre temps et espace de l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \quad (1)$$

(Nous choisissons $\hbar = 1$). Pour une particule libre déjà :

$$H = T = \frac{p^2}{2m}, \quad (2)$$

ce qui, pour une onde plane $\psi \sim e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$, donne

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\Sigma\left(i\frac{\partial}{\partial x^a}\right)^2\psi \quad (3)$$

et l'on voit apparaître des dérivées secondes dans les variables d'espace, par opposition à une dérivée simple par rapport au temps. Le problème se trouve déjà dans (2) où l'énergie est associée au carré de l'impulsion.

La généralisation relativiste de (2) - nous choisissons $c = 1$

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (4)$$

traite par contre symétriquement les variables de temps (énergie) et d'espace (impulsion). Le prix à payer est toutefois un doublement des solutions :

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}. \quad (5)$$

Nous verrons que ce doublement, inévitable en théorie quantique des champs, conduit à l'une des prédictions les plus surprenantes de la théorie quantique relativiste, à savoir : l'existence d'antiparticules.

Il existe en fait deux façons de généraliser (3) en une expression covariante sur le plan relativiste.

La première soit (4) conduit à une équation aux dérivées partielles de 2ème ordre, tant dans les variables spatiales que temporelles. C'est l'équation de Klein Gordon qui s'applique aux champs scalaires (voire sa généralisation aux champs vectoriels).

Une autre voie consiste à rechercher une équation de premier ordre, tant en t qu'en x . Nous verrons que cette équation s'applique aux fermions. Ici, un nouveau gain est enregistré par rapport à la théorie non relativiste puisque nous verrons que le spin fait partie intégrante de la description (il était ajouté "à la main" en théorie non relativiste). Fait remarquable, le principe d'exclusion de Pauli est aussi obtenu : c'est une conséquence du formalisme relativiste en théorie quantique des champs.

En outre, ce formalisme permettra de décrire la création et la destruction de particules qui résulte de la théorie relativiste, mais qui n'est pas décrite par l'équation de Schrödinger.

Avant d'aborder ces développements physiques, nous devons compléter notre connaissance des "objets relativistes" en étudiant les représentations du groupe de Lorentz, en particulier pour les spineurs. C'est l'objet du chapitre 1.

Chapitre 1

Les transformations de Lorentz et leurs représentations

Un groupe de transformations peut être défini de façon intrinsèque (vision géométrique des rotations, par exemple) ou à partir de l'une de ses représentations.

Dans le cas des transformations de Lorentz, c'est d'ordinaire cette dernière approche qui est prise. On envisage, en effet, les transformations qui, agissant sur un espace vectoriel à 4 dimensions (t, x, y, z) conservent la forme : (nous choisirons dans la suite $c = 1$)

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2.$$

L'ensemble des matrices 4×4 agissant sur les vecteurs (t, x, y, z) forme de la sorte la représentation de définition de $O(3, 1)$. Nous utiliserons L dans ces notes pour distinguer le groupe de Lorentz.

Avant de rappeler les propriétés essentielles de cette représentation, insistons sur le fait que l'on aurait pu choisir d'autres représentations comme point de départ. Par exemple, on aurait pu garder comme objets de base des tenseurs plutôt que des vecteurs,.... A un niveau presque caricatural, les scalaires forment aussi une représentation (par exemple ; la température en un point). Dans ce cas, toutes les opérations de groupe sont représentées par l'identité : il s'agit d'une représentation - dégénérée, non fidèle (par représentations fidèles, nous entendons que chaque opération de groupe est représentée de façon distincte).

Nous devons aborder dans la suite les notions de représentations fidèles,

(ir)réductibles,(in)équivalentes,... qui s'avèrent importantes pour la classification des interactions possibles.

1.1 Représentation de définition de O (3,1)

Pour le tenseur métrique (numériquement invariant), nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & (1.1) \\
 s^2 &= g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu \\
 x^\mu &= g^{\mu\nu}x_\nu \\
 g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} &= \delta^\mu_\nu
 \end{aligned}$$

Remarque : les $x^i = 1, 2, 3$ sont identifiés aux composantes euclidiennes d'espace x, y, z (on aurait pu aussi choisir d'y identifier les x_i).

La convention de sommation entre indices muets s'entend, pour autant qu'ils soient situés l'un en position haute, l'autre en position basse :

$$\begin{aligned}
 x^\mu x_\mu &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 & (1.2) \\
 &\neq \sum_\mu x^\mu x^\mu = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.
 \end{aligned}$$

Les matrices représentant les transformations de Lorentz sont notés Λ ; elles sont de taille 4×4 , à coefficients réels

$$\begin{aligned}
 x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \\
 y'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu y^\nu.
 \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit de respecter la métrique (1.1), il vient :

$$\forall x \forall y : g_{\mu\nu}x'^\mu y'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho y^\sigma \equiv g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \quad (1.3)$$

la propriété étant vraie pour tout x et tout y , il vient :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta. \quad (1.4)$$

On peut éviter de développer les indices en écrivant :

$$g = \Lambda^t g \Lambda. \quad (1.5)$$

On en tire rapidement quelques propriétés générales des matrices Λ , de (1.5), il vient :

$$\begin{aligned} (\det \Lambda)^2 &= 1, \\ (\det \Lambda) &= \pm 1. \end{aligned}$$

En outre, en développant l'expression de g_{00} :

$$\begin{aligned} 1 &= g_{00} = g_{\mu\nu} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \\ \Rightarrow (\Lambda_0^0)^2 &= 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \text{ ou } \Lambda_0^0 \leq -1. \quad (1.6)$$

On voit que l'on peut donc scinder les matrices représentant $O(3,1)$ en 4 catégories, selon le signe du déterminant et celui de Λ_0^0 .

On pose (L étant le groupe de Lorentz) :

$$\begin{aligned} \{\Lambda \vdash \det \Lambda = +1\} &= \text{représentation de } L_+, \\ \{\Lambda \vdash \det \Lambda = -1\} &= \text{représentation de } L_-. \end{aligned}$$

Il est clair que si L_+ forme un groupe, il ne peut en être de même de L_- (le produit de deux transformations de L_- est dans L_+); il s'agit d'une classe latérale. Les transformations de L_+ sont dites *propres*.

Comme Λ_0^0 est lié à l'orientation de t , on distingue :

$$\begin{aligned} \{\Lambda \vdash \Lambda_0^0 \geq 1\} &= \text{représentation de } L^\uparrow, \\ \{\Lambda \vdash \Lambda_0^0 \leq -1\} &= \text{représentation de } L^\downarrow. \end{aligned}$$

L^\uparrow est le groupe de Lorentz *orthochrone* et comme précédemment, il est seul sous-groupe de L . On arrive donc à la classification double :

	$\det = 1$	$\det = -1$
$\Lambda_0^0 \geq 1$	L_+^\uparrow	L_-^\uparrow
$\Lambda_0^0 \leq -1$	L_+^\downarrow	L_-^\downarrow

Dans ce tableau, le seul sous-groupe est L_+^\uparrow , qui décrit les transformations propres orthochrones. A la différence des classes latérales, ces transformations peuvent s'obtenir par une suite de transformations infinitésimales à partir de l'identité. Les autres transformations peuvent s'écrire sous forme d'un produit d'une transformation de L_+^\uparrow et d'une symétrie "discrète". Par exemple, si Λ_1 fait partie de la représentation de L_-^\uparrow , on peut l'écrire sous la forme¹ :

$$\Lambda_1 = P \tilde{\Lambda}_1$$

$$\text{où } \tilde{\Lambda}_1 \in L_+^\uparrow \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

P décrit le renversement des coordonnées spatiales (opération de parité en symétrie centrale). De même, si $\Lambda_2 \in L_+^\downarrow$,

$$\Lambda_2 = T \tilde{\Lambda}_2$$

$$\text{où } \tilde{\Lambda}_2 \in L_+^\uparrow \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T représente le renversement du temps.

1.2 Transformations infinitésimales

Concentrons-nous maintenant sur les transformations de L_+^\uparrow qu'on appelle infinitésimales, c'est-à-dire, sur celles qui sont "proches" de l'identité. On peut écrire pour la représentation envisagée :

$$\Lambda_{\text{inf}} = I + \varepsilon l + O(\varepsilon^2) \quad (1.8)$$

où $\varepsilon l = \sum_i \varepsilon_i l_i$ est une combinaison linéaire de matrices l_i réelles, 4×4 , linéairement indépendantes, avec des coefficients ε_i infinitésimaux (on néglige leur carré). On injecte (1.8) dans la contrainte (1.5) :

$$(I + \varepsilon l)^t g (I + \varepsilon l) = g$$

¹Nous utilisons le raccourci $\Lambda_1 \in L_-^\uparrow$, il conviendrait de dire Λ_1 appartient à une représentation de L_-^\uparrow .

$$\Rightarrow g + \varepsilon (gl)^t + \varepsilon (gl) = g$$

au premier ordre en ε , d'où

$$(gl_i) = -(gl_i)^t. \quad (1.9)$$

Il y a une base de 6 matrices gl_i antisymétriques d'où une base de 6 générateurs l_i . Un choix (parmi d'autres) :

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Appliquons plusieurs fois de suite une transformation infinitésimale simple, par exemple $\Lambda_{\text{inf}} = I + \varepsilon N_1$; $\Lambda = (I + \frac{u}{n} N_1)^n$ et faisons tendre n vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{u}{n} N_1 \right)^n \equiv e^{uN_1} \equiv I + uN_1 + \frac{1}{2} (uN_1)^2 + \frac{1}{3!} (uN_1)^3 + \dots$$

En utilisant $(N_1)^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(N_1)^3 = N_1$, on obtient,

$$e^{uN_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sinh u & 0 & 0 \\ -\sinh u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} t' &= \cosh u \cdot t - \sinh u x; & y' &= y \\ x' &= \sinh u \cdot t + \cosh u x; & z' &= z. \end{aligned}$$

En posant $v = \tanh u$, $-1 < v < 1$, on trouve :

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (t - vx); & y' &= y \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (x - vt); & z' &= z \end{aligned} \right\} \text{boost dans la direction x.} \quad (1.11)$$

De la même manière

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\sigma}{n} M_1 \right)^n \equiv e^{\sigma M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \sigma & -\sin \sigma \\ 0 & 0 & \sin \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}$$

est une rotation autour de l'axe x .

1.3 Commutateurs

Un petit changement de notations : pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, on définit : $K_j = -iN_j$ et $J_j = iM_j$. La liste (1.10) devient

$$K_1, K_2, K_3; J_1, J_2, J_3. \quad (1.12)$$

Dans l'étude d'un groupe et de ses représentations les commutateurs entre les générateurs jouent un rôle crucial. Avec notre choix, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= -iJ_3, \\ [J_1, J_2] &= iJ_3, \\ [J_1, K_2] &= iK_3 \end{aligned}$$

et leurs permutations circulaires.

1.4 Générateurs-Relations de commutation

Nous poursuivons dans la *représentation de définition* du groupe de Lorentz, c'est-à-dire, les matrices 4×4 agissant sur un espace vectoriel à 4 dimensions. Si nous nous limitons maintenant à des transformations infinitésimales et donc à L_+^\uparrow , nous pouvons écrire une transformation G sous la forme :

$$\begin{aligned} G &= e^{i\varepsilon^a T_a} \\ G &= \mathbb{I} + i\varepsilon^a T_a + \frac{1}{2!} (i\varepsilon^a T_a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

où les coefficients réels ε^a définissent l'opération G dans une base $\{T_a\}$. L'ensemble des $\{T_a\}$ est choisi linéairement indépendant. Il faut noter que cette

notation transcende la représentation de définition et s'applique à toute représentation de groupe. Les T_a sont appelés *générateurs* et représentés, selon le cas, par une matrice de taille appropriée. Notons enfin que le facteur (i) dans (1.13) est affaire de convention dans la définition des T .

Il est intéressant d'envisager la "géométrie" du groupe en examinant le produit de transformations, notamment infinitésimales. Si G_A et G_B sont les transformations de groupe, il y va de même de G_A^{-1} et G_B^{-1} ; et donc de :

$$G_x = G_B^{-1} G_A^{-1} G_B G_A.$$

Si les opérations étaient commutatives, on aurait $G_x \equiv \mathbb{I}$. Un résultat non trivial nous informe des propriétés géométriques autour de l'identité (il ne nous donne aucune information pour la structure globale du groupe; voir plus loin). Enfin, G_x est défini entièrement par la géométrie du groupe, et ne doit pas dépendre de la représentation (fidèle) choisie.

Considérons en particulier le cas où G_A opère selon le seul générateur T_A et G_B selon le seul générateur T_B

$$\begin{aligned} G_A &= e^{i\xi T_A} \simeq \mathbb{I} + i\xi T_A + \left(\frac{(i\xi)^2 T_A^2}{2!} \right) + \dots; \\ G_B &= e^{i\eta T_B} \simeq \mathbb{I} + i\eta T_B + \left(\frac{(i\eta)^2 T_B^2}{2!} \right) + \dots; \\ G_A^{-1} &= e^{-i\xi T_A}; \quad G_B^{-1} = e^{-i\eta T_B}. \end{aligned}$$

Il vient au second ordre

$$\begin{aligned} G_x &= \mathbb{I} - i\eta T_B (-i\xi) T_A \\ &\quad - i\eta T_B (i\xi) T_A \\ &\quad - i\xi T_A (i\eta T_B) \\ &\quad + i\eta T_B (i\xi T_A) + \dots \\ &= \mathbb{I} + (i\xi i\eta) [T_B T_A] + \text{termes d'ordre 3} \\ &= \mathbb{I} + i\varepsilon_x^c T_c + \dots \end{aligned}$$

où la dernière ligne exprime que le résultat G_x est lui-même exprimable en facteur des générateurs, avec des coefficients ε_x^c dictés par la géométrie de groupe.

Il en résulte que le commutateur des deux générateurs $[T_A, T_B]$ s'exprime comme une combinaison linéaire de générateurs :

$$[T_A, T_B] = if_{ABC}T_C. \quad (1.14)$$

Pour autant que les matrices représentant les générateurs T dans différentes représentations soient correctement normalisées, les facteurs f_{ABC} doivent être indépendants de la représentation, puisqu'ils traduisent la géométrie locale de groupe. On les appelle *coefficients de structure*. De (1.14), on tire l'antisymétrie des f sous l'échange de la première paire d'indices

$$f_{ABC} = -f_{BAC}.$$

En multipliant par T_Z , on obtient :

$$T_A T_B T_Z - T_B T_A T_Z = if_{ABC} T_C T_Z.$$

Si nous supposons que les T sont orthogonaux :

$$\text{Tr} T_A T_B = \delta_{AB} \eta$$

où la trace s'entend sur les indices matriciels $(T_A)_{ij}$, et η dépend de la représentation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Tr} (T_A T_B T_Z) - \text{Tr} (T_B T_A T_Z) &= if_{ABC} \delta_{ZC} \eta \\ &= if_{ABZ} \eta. \end{aligned}$$

Par l'invariance cyclique de la trace :

$$\text{Tr} (T_Z T_A T_B) - \text{Tr} (T_A T_Z T_B) = if_{ABZ} \eta,$$

ou encore :

$$\text{Tr} [T_Z T_A] T_B = if_{ABZ} \eta.$$

En renommant les lettres A, B, Z et en comparant à la relation initiale, on tire :

$$f_{ABZ} = f_{ZAB},$$

c'est-à-dire, l'invariance de coefficients de structure sous une permutation cyclique. L'antisymétrie sous l'échange des autres paires d'indices en résulte ; entre autres :

$$\begin{aligned} f_{ABC} &= -f_{BAC} = -f_{ACB} \\ &= f_{CAB} = f_{BCA} \dots \end{aligned}$$

1.5 Le groupe $SU(2)$ et sa relation aux rotations à 3 dimensions

Motivation : dans le contexte de la mécanique quantique, s'introduit la notion de spin, et l'électron, par exemple, est décrit par une fonction d'onde complexe à 2 composantes.

Nous voulons étudier les symétries associées à un tel espace complexe à deux dimensions. Nous verrons que les groupes ainsi définis peuvent être mis en rapport respectivement avec les rotations à 3 dimensions (pour $SU(2)$) et (dans le chapitre suivant) le groupe de Lorentz à 4 dimensions (pour $SL(2)$).

Nous commençons donc par définir le groupe $U(2)$ à partir de sa représentation à 2 dimensions, c'est-à-dire, un ensemble de matrices G agissant sur un spineur bi-dimensionnel

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}.$$

Sous une transformation G de groupe, on a :

$$\psi' = G\psi.$$

Inspirés par l'interprétation quantique du module dans la fonction d'onde, $\psi^\dagger\psi$, comme une probabilité de présence, nous en demandons la conservation :

$$\begin{aligned} \psi'^\dagger\psi' &= \psi^\dagger\psi \\ &= \psi^\dagger G^\dagger G\psi. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Il vient donc :

$$G^\dagger G = 1 = GG^\dagger.$$

Il en résulte que :

$$|\det G| = 1$$

ou encore :

$$\det G = e^{i\alpha}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Nous pouvons écrire sans perte de généralité (pour des matrices 2×2) :

$$G = e^{i\alpha} \tilde{G} \tag{1.16}$$

avec $\det \tilde{G} = 1$

L'ensemble des matrices G telles que :

$$G^\dagger G = 1$$

forme la représentation de définition du groupe $U(2)$ (groupe unitaire, car il conservera $\psi^\dagger \psi$) tandis que les transformations de type \tilde{G} , avec déterminant $= 1$ appartiennent au groupe plus réduit : le groupe "spécial" : $SU(2)$. Par analogie, l'ensemble des $S = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ forme une représentation à une dimension du groupe $U(1)$. La relation (1.16) montre que toute transformation de $U(2)$ peut se factoriser en une transformation de $U(1)$ et une transformation de $SU(2)$; l'ordre a peu d'importance, puisque le facteur $U(1)$ commute avec toutes les opérations de $SU(2)$. On écrit :

$$U(2) = SU(2) \otimes U(1).$$

1.5.1 Représentation de définition de $SU(2)$

Nous nous concentrons maintenant sur le groupe $SU(2)$. Nous observons qu'on peut écrire un autre invariant que (1.15). En effet, si χ et ψ sont deux spineurs, le fait que le déterminant se réduit à l'identité implique :

$$\varepsilon_{ij} \chi'_i \psi'_j = \chi'_1 \psi'_2 - \chi'_2 \psi'_1 = \chi_1 \psi_2 - \chi_2 \psi_1 = \varepsilon_{ij} \chi_i \psi_j$$

Nous nous sommes restreints ici au sous-groupe non abélien $SU(2)$.

Nous écrivons, de façon générale, pour toute représentation :

$$G = e^{i\Sigma\alpha^j T_j} \tag{1.17}$$

avec $\alpha^j \in \mathbb{R}$, les T_j représentent les générateurs. On observe que :

$$G^\dagger G = 1 \Rightarrow T_j = T_j^\dagger.$$

Exercice : Démontrer $\det G = +1 \Rightarrow \text{Tr} T_j = 0$.

Dans le cas particulier de la représentation à 2 dimensions, agissant sur les spineurs ψ , on peut choisir : (les raisons de la normalisation apparaîtront ultérieurement)

$$T_j = \frac{\sigma_j}{2}$$

où $\{\sigma_j\}$ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

qui forment l'une des bases possibles des matrices 2×2 hermitiennes de trace nulle. Il est alors facile de calculer les coefficients de structure f_{ijk} ; on trouve $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$:

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (1.19)$$

Ces coefficients étant indépendants de la représentation, il vient, pour toute représentation de $SU(2)$:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k. \quad (1.20)$$

Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu précédemment pour le groupe $SO(3)$ des rotations réelles. On trouve, en effet, le même nombre de générateurs, et les mêmes relations de commutation. Ceci implique une similitude (mais pas une identité) entre les deux groupes. Elle se précisera par la suite.

1.5.2 Quelques représentations de $SU(2)$

A partir de la représentation de définition, agissant sur ψ , nous pouvons essayer de construire d'autres représentations.

Représentation conjugué complexe

Commençons par prendre le conjugué complexe de (1.17)

$$\psi'^* = G^* \psi^* = e^{i\Sigma\alpha^j \left(\frac{-\sigma_j^*}{2} \right)} \psi^*. \quad (1.21)$$

Il semble donc s'agir d'une nouvelle représentation, dont les générateurs seraient

$$\left\{ \frac{-\sigma_j^*}{2} \right\} \text{ au lieu de } \left\{ \frac{\sigma_j}{2} \right\}.$$

Est-ce vraiment une représentation distincte, ou pouvons-nous, par un réarrangement de la base de l'espace à 2 dimensions, nous ramener aux matrices précédentes ?

Recherchons une matrice R qui effectue un tel réarrangement. On a :

$$R\psi'^* = R.e^{i\alpha} \begin{pmatrix} -\sigma_j^* \\ \sigma_j \end{pmatrix} R^{-1}R.\psi^*$$

et pour établir l'équivalence des représentations, il suffit donc que :

$$R \frac{-\sigma_j^*}{2} R^{-1} = \frac{\sigma_j}{2}.$$

Il est facile de vérifier qu'une telle matrice existe ; pour le choix de matrices σ_i utilisé ici, il suffit de prendre :

$$R = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que, moyennant le réarrangement :

$$\tilde{\psi} = i\sigma_2\psi^* = \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

on a :

$$\tilde{\psi}' = e^{i\Sigma\alpha^i \frac{\sigma_i}{2}} \tilde{\psi}. \quad (1.23)$$

Les deux représentations sont dites *équivalentes*, et la conjugaison complexe ne nous apporte donc rien de neuf pour construire nos représentations (N.B. cette situation est particulière à $SU(2)$; il n'en n'est pas de même pour $SL(2)$; ce n'est pas non plus le cas pour les représentations de définition des groupes $SU(N)$ avec $N > 2$).

Représentation triviale et adjointe

Nous utilisons maintenant des produits de représentations pour en construire de nouvelles. (Comme on construit les tenseurs à partir du produit de vecteurs, pour l'espace euclidien).

Considérons, par exemple, 2 spineurs ψ et χ et l'ensemble des produits

$$\{\psi^{*i}\chi^j\}.$$

Nous pouvons, bien évidemment, calculer leurs transformations à partir des matrices 2×2 agissant sur les spineurs individuels mais nous pouvons aussi

considérer ces 4 objets comme appartenant à un espace vectoriel (à 4 composantes) sur lequel agit une représentation 4×4 de $SU(2)$. Si, par exemple, nous choisissons d'écrire :

$$\begin{aligned} B^1 &= \psi^{*1}\chi^1; & B^2 &= \psi^{*1}\chi^2; \\ B^3 &= \psi^{*2}\chi^1; & B^4 &= \psi^{*2}\chi^2, \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$B' = GB$$

où G est représenté par une matrice 4×4 .

Il est souvent possible de simplifier cette expression si l'on peut observer que certaines combinaisons des B^i se transforment entre elles. Appelons Q la matrice qui réaliserait ce partage :

$$QB' = QGQ^{-1}(QB).$$

Il faudrait alors que QGQ^{-1} prenne une forme bloc-diagonale (le nombre de blocs n'étant d'ailleurs pas imposé).

Dans le cas présent, la réduction est simple à opérer. Nous savons, en effet, que :

$$\psi^\dagger\chi = \psi_1^*\chi_1 + \psi_2^*\chi_2$$

est un invariant. Ceci nous laisse 3 autres combinaisons indépendantes qui peuvent s'écrire :

$$V^i = \psi^\dagger \frac{\sigma^i}{2} \chi = \frac{1}{2} \psi_\alpha^\dagger \sigma_{\alpha\beta}^i \chi_\beta; \quad (1.24)$$

qui avec

$$S = \psi^\dagger\chi \quad (1.25)$$

donnent

$$\begin{bmatrix} V^i \\ S \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} & 0 \\ G & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V^i \\ S \end{bmatrix}.$$

Nous avons maintenant, outre la représentation triviale (par l'identité), une représentation 3×3 de G .

Voyons l'effet d'une transformation finie de $SU(2)$ (par exemple, et sans restriction de généralité, une transformation de paramètre α selon σ_3) sur les

ψ , χ et V . Il vient facilement :

$$\begin{aligned}\psi' &= G\psi = e^{i\alpha\frac{\sigma^3}{2}}\psi \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et, par calcul explicite :

$$\begin{aligned}V^{1'} &= \cos\alpha V^1 + \sin\alpha V^2 \\ V^{2'} &= -\sin\alpha V^1 + \cos\alpha V^2 \\ V^{3'} &= V^3.\end{aligned}$$

On voit déjà sur cet exemple explicite qu'à toute transformation de $SU(2)$ est associée par cette construction une rotation dans l'espace à 3 dimensions c'est-à-dire un élément de $SO(3)$. Toutefois, il faut noter que la valeur $\alpha = 2\pi$ conduit à :

$$\begin{aligned}\psi' &= -\psi \\ V' &= V\end{aligned}$$

En fait, pour parcourir tout le groupe $SU(2)$ il faut autoriser $\alpha \in [0, 4\pi]$, ce qui correspond à recouvrir 2 fois le groupe $SO(3)$: *les transformations distinctes α et $\alpha + 2\pi$ correspondent à la même transformation de $SO(3)$.*

On voit donc que si les relations de commutation déterminent la structure de groupe près de l'identité, elles ne le caractérisent pas entièrement, puisque des coefficients de structure identiques pour $SU(2)$ et $SO(3)$ correspondent à des groupes, certes apparentés mais différents.

Nous allons généraliser cette construction en construisant la *représentation adjointe* de $SU(2)$. Il s'agit, en fait, de la même construction que V . Dans le souci de généralité, nous supposons que nous partons d'une représentation quelconque (non triviale) avec des générateurs T représentés par des matrices $N \times N$ agissant sur φ . On construit

$$V^i = \varphi^\dagger T^i \varphi \tag{1.26}$$

et l'on calcule, pour une transformation infinitésimale :

$$\varphi' \cong (1 + i\alpha^a T^a) \varphi$$

pour $\alpha \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
V^i &= \varphi'^{\dagger} T^i \varphi' = \varphi^{\dagger} (1 - i\alpha^a T^a) \cdot T^i (1 + i\alpha^a T^a) \varphi \\
&\cong \varphi^{\dagger} T^i \varphi + i\alpha^a \varphi^{\dagger} [T^i T^a] \varphi \\
&= \varphi^{\dagger} T^i \varphi + i \cdot i f_{iax} \cdot \alpha^a \cdot \varphi^{\dagger} \cdot T^x \varphi \\
&= \varphi^{\dagger} T^i \varphi + i \cdot (i f_{iax}) \cdot \alpha^a \cdot V^x \\
&= (\delta^{ix} + i (i f_{iax}) \alpha^a) V^x.
\end{aligned}$$

Pour une transformation finie :

$$V' = e^{i\alpha^a T^a} V \quad (1.27)$$

où on a pris : $(T^a)_{ix} = i f_{iax}$ comme représentation des générateurs agissant sur l'espace des V^i . Cette représentation des générateurs satisfait bien évidemment aux relations de commutations.

Exercice : vérifier cette affirmation en utilisant l'identité de Jacobi

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Il est important de remarquer que, quelle que soit la représentation φ de départ, nous obtenons la même représentation (dite représentation adjointe, $V^{\dagger} = V$) de groupe. La dimension de l'espace sur lequel agit la représentation adjointe est donc entièrement déterminée par le nombre de générateurs indépendants.

1.6 Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ et sa relation au groupe de Lorentz

Ayant introduit les spineurs à deux composantes et établi un lien entre $SU(2)$ et le groupe des rotations (le lien entre spineur et moment angulaire sera établi plus loin dans le cadre du Lagrangien de Dirac), nous voulons maintenant étendre ce lien à l'ensemble du groupe de Lorentz (ou, du moins, à sa composante L_+^{\uparrow}). Puisque L_+^{\uparrow} dépend de 6 paramètres (3 "boosts" et 3 rotations), le groupe $SU(2)$ ne peut de toute évidence suffire à la tâche.

Abandonner la contrainte d'unimodularité pour passer à $U(2)$ n'apporterait qu'un paramètre supplémentaire. Comme nous voulons garder une représentation agissant sur un espace complexe à 2 dimensions (qui décrit la

fonction d'onde d'un spineur), nous sommes contraints d'abandonner plutôt la contrainte d'unitarité (on verra plus loin comment l'unitarité de la théorie est néanmoins préservée) et nous nous tournons vers la représentation de définition du groupe des transformations linéaires, unimodulaires, à 2 dimensions complexes.

$SL(2, \mathbb{C})$ est représenté par l'ensemble des matrices complexes 2×2 , et de déterminant = 1. Il est commode d'adopter comme précédemment, une formulation exponentielle :

$$U = e^{i\alpha^j T_j}. \quad (1.28)$$

La seule contrainte est maintenant que les matrices représentant T_j soient de trace nulle pour avoir $\det U = 1$. La base des générateurs doit nécessairement contenir ceux de $SU(2)$, par exemple, pour la représentation de définition $\{\frac{\sigma_j}{2}\}$, mais en outre, trois nouveaux paramètres permettent de décrire l'ensemble des matrices de trace nulle anti-hermitiennes.

On peut, par exemple, prendre $\{+i\frac{\sigma_j}{2}\}$ ou encore $\{-i\frac{\sigma_j}{2}\}$ comme représentation à 2 dimensions de ces 3 générateurs supplémentaires. On aura donc :

$$\xi' = e^{i(\alpha_j - i\beta_j)\frac{\sigma_j}{2}} \xi \quad (1.29)$$

ou

$$\eta' = e^{i(\alpha_j + i\beta_j)\frac{\sigma_j}{2}} \eta. \quad (1.30)$$

Ces deux représentations ne sont pas équivalentes. En effet, dans le cas contraire, il faudrait pouvoir définir une matrice C , telle que $C\xi$ se transforme comme η . Ceci nécessite, en même temps, pour les termes α et β respectivement :

$$\begin{aligned} C\sigma^j C^{-1} &= \sigma^j \\ C\sigma^j C^{-1} &= -\sigma^j \end{aligned}$$

ce qui est clairement impossible.

On peut par contre vérifier facilement que ξ^* se transforme maintenant de façon équivalente à η (et non plus à ξ comme pour le groupe $SU(2)$). En effet :

$$\xi'^* = e^{-i(\alpha_j + i\beta_j)\frac{\sigma_j}{2}} \xi^*, \quad (1.31)$$

ce qui se ramène, moyennant le choix $C = iT_2$ précédemment adopté pour $SU(2)$, à :

$$C\xi'^* = e^{i(\alpha_j + i\beta_j)\frac{\sigma_j}{2}} C\xi^* \quad (1.32)$$

(on voit donc que, pour $\beta = 0$, $C\xi^*$ se transforme comme ξ , ainsi qu'on le savait pour $SU(2)$, mais pour les transformations $\beta \neq 0$, $C\xi^*$ se transforme en fait comme η). De même, la transformation de η^* est équivalente à celle de ξ . Les quantités ξ et η sont appelés semi-spineurs (historiquement : de première ou deuxième espèce).

Quels invariants pouvons-nous construire à partir des semi-spineurs ? De toute évidence, $\xi^\dagger \xi$ n'est plus un invariant (le groupe n'est pas unitaire). Par contre, la combinaison antisymétrique : (ρ se transforme comme ξ)

$$\varepsilon^{ij} \xi_i^\dagger \rho_j' = \varepsilon^{ij} \xi_i \rho_j \det(U) \quad (1.33)$$

est conservée pour les matrices unimodulaires. Il en va de même pour les semi-spineurs type "η". Si η et χ sont deux semi-spineurs de même type,

$$\varepsilon^{ij} \eta_i' \chi_j' = \varepsilon^{ij} \eta_i \chi_j \quad (1.34)$$

(nous évitons pour le moment d'écrire $\varepsilon^{ij} \xi_i \xi_j$, car pour des spineurs "ordinaires" cette quantité s'annule identiquement ; on verra plus loin lorsque nous aurons affaire à des opérateurs qui anticommulent qu'un tel terme peut être important).

Diverses notations existent pour distinguer les semi-spineurs des deux types. Dans le contexte de l'équation de Dirac, on verra qu'il décrivent des particules sans masse soit lévogyres (spin opposé au mouvement), soit dextrogyre. Anticipant sur cette démonstration, nous leur affectons donc les indices d'un L (levogyre, lefthanded) et R (dextrogyre, right-handed). Ainsi, ψ_L désigne un spin de type "ξ" et ψ_R un spineur de type "η".

Nous pouvons maintenant établir le lien avec le groupe de Lorentz en considérant une construction similaire à celle utilisée précédemment pour la représentation adjointe de $SU(2)$.

Exercice : Vérifier que $\chi_R^\dagger \psi_L$ est un scalaire pour $SL(2, \mathbb{C})$; il en va de même de $\chi_L^\dagger \psi_R$.

1.6.1 Liens avec le groupe de Lorentz

Pour établir le lien avec le groupe de Lorentz, nous nous basons sur une construction similaire à celle utilisée pour $SU(2)$. Nous avons introduit :

$$V_i = \xi_L^\dagger \sigma_i \xi_L \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.35)$$

et nous devons compléter cet ensemble par :

$$V_0 = \xi_L^\dagger \sigma_0 \xi_L. \quad (1.36)$$

Nous introduisons, de façon similaire (des spineurs de type ξ_L et η_R différent pour l'échange $\sigma_i \leftrightarrow -\sigma_i$) :

$$W^\mu = \eta_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta_R \quad (1.37)$$

$$V^\mu = \xi_L^\dagger \sigma^\mu \xi_L \quad (1.38)$$

avec :

$$\sigma_\mu = \{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} ; \sigma^\mu = g^{\mu\nu} \sigma_\nu \quad (1.39)$$

$$\bar{\sigma}_\mu = \{\mathbb{I}, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3\} ; \bar{\sigma}^\mu = g^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\nu. \quad (1.40)$$

Comme nous savons déjà que W^i et V^i se transforment comme des vecteurs de $SO(3)$ sous les transformations de $SU(2)$, il nous reste à vérifier l'effet des transformations de $SL(2)/SU(2)$. Pour cela, nous pouvons sans perte de généralité considérer une transformation selon K_3 :

$$\begin{aligned} G &= e^{+\beta \frac{\sigma_3}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\beta}{2} + \sinh \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & \cosh \frac{\beta}{2} - \sinh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve facilement :

$$V^{0'} = \cosh 2\beta V^0 - \sinh 2\beta V^3$$

$$V^{3'} = -\sinh 2\beta V^0 + \cosh 2\beta V^3$$

qui correspond bien à une transformation propre de Lorentz selon l'axe 3 (boost selon l'axe 3).

Exercice : vérifier qu'il en va de même pour W .

1.6.2 Spineurs de Dirac et représentation chirale des matrices γ^μ

Ces notations sont malheureusement lourdes, notamment par la nécessité de distinguer les deux représentations ψ_L et ψ_R .

Il est en fait commode de représenter simultanément les 2 objets en utilisant un "spineur de Dirac" à 4 composantes, qui consiste simplement à superposer dans une même colonne les 2 objets. On a alors :

$$\begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\alpha}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\beta\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\alpha}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\beta\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Nous remarquons déjà que l'opération de parité dans l'espace à 4 dimensions (qui renverse les vitesses, et donc $\vec{\beta}$, mais pas dans les rotations $\vec{\alpha}$) correspond à échanger les éléments : L et R .

Afin d'évoluer vers une notation plus commode, traitant les 4 composantes sur pied d'égalité, nous introduisons encore :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Remarquons que le scalaire :

$$S = \psi_L^\dagger \chi_R + \psi_R^\dagger \chi_L \quad (1.43)$$

s'écrit simplement :

$$S = \psi^\dagger \gamma_0 \chi \quad (1.44)$$

où

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \text{ et } \chi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

En raison de l'importance de la combinaison $\psi^\dagger \gamma_0$ (qui remplace formellement la conjugaison hermitienne habituelle), on lui réserve une notation particulière :

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 \quad (1.46)$$

(pour mémoire, on l'appelle "adjoint de Pauli").

Si nous introduisons, en outre, les matrices :

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

avec $\gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu$, on vérifie trivialement que

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \psi^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \psi = \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \quad (1.48)$$

se transforme comme un quadrivecteur V^μ . Notez que la représentation de γ^0 et γ^i sous la forme (1.42) et (1.47) est appelée *représentation chirale* des matrices γ^μ .

Nous définissons encore la matrice :

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (1.49)$$

Dans le choix de matrices γ utilisés ici, elle s'écrit :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

de sorte que

$$L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

$$R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

et

$$L\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_L; R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \psi_R. \quad (1.53)$$

Remarquons que L et R forment un ensemble complet de projecteurs orthogonaux, satisfaisant à :

$$L + R = \mathbb{I}; LR = RL = 0; L^2 = L; R^2 = R$$

Nous approfondirons dans le chapitre suivant les propriétés des matrices γ^μ notamment dans d'autres bases que la *base chirale* utilisée ici.

Exercice : que représentent les quantités $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ et $\bar{\psi}\gamma_5\psi$?

Chapitre 2

Equation de Dirac

Nous rappelons d'abord que notre but initial était de généraliser à 3 + 1 dimensions l'équation de Schrödinger. Cette dernière, contenant une dérivée simple par rapport au temps mais double par rapport aux variables spatiales, ne peut satisfaire à l'invariance relativiste.

Le recours à des dérivées secondes par rapport au temps conduisant à des solutions d'énergie négative¹, il est logique d'essayer des dérivées simples. Nous verrons toutefois que cette voie, suivie par Dirac, ne permet toutefois pas d'éviter les solutions d'énergie négative. Ces dernières, inévitables, seront par la suite interprétées en termes d'antiparticules.

Si nous reprenons donc les semi-spineurs ψ_L et ψ_R définis au chapitre précédent, nous observons que, sous $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}\psi_L^\dagger \psi_R &= \text{scalaire} \\ \psi_L^\dagger \sigma^\mu X_\mu \psi_L &= \text{scalaire}\end{aligned}$$

(où X_μ est un quadrivecteur quelconque). Il en résulte que $\sigma^\mu X_\mu \psi_L$ se transforme comme ψ_R , et, si nous voulons écrire une équation de premier ordre portant sur ψ_L , nous avons :

$$i\partial_\mu \sigma^\mu \psi_L = K\psi_R \tag{2.1}$$

où K est un coefficient scalaire. Pour des solutions en "onde plane" :

$$\psi_L(x) = e^{-ipx} \chi_L(p), \tag{2.2}$$

¹voir chapitre 3 : équation de Klein-Gordon

il vient alors simplement :

$$p^\mu \sigma_\mu \psi_L = K \psi_R. \quad (2.3)$$

De la même façon en remplaçant σ^μ par $\bar{\sigma}^\mu$, nous devons avoir :

$$p^\mu \bar{\sigma}_\mu \psi_R = K' \psi_L.$$

En combinant les deux équations, nous éliminons ψ_R

$$p^\nu p^\mu \bar{\sigma}_\nu \sigma^\mu \psi_L = K K' \psi_L.$$

Le produit $p^\mu p^\nu$ étant symétrique sous l'échange de μ en ν , nous devons symétriser avant d'identifier les coefficients :

$$P^\mu P^\nu \frac{\bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu + \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu}{2} \psi_L = K K' \psi_L.$$

Il est facile de vérifier explicitement que

$$(\bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu + \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2g_{\mu\nu}$$

et en nous rappelant que pour une particule libre ($c = 1$)

$$p^2 = m^2, \quad (2.4)$$

il vient donc

$$p^2 = K K' = m^2. \quad (2.5)$$

Avant de passer à une écriture plus compacte, nous pouvons faire quelques observations.

1. Alors que les semi-spineurs ψ_L et ψ_R peuvent suffire à décrire des particules sans masse, la présence de cette dernière impose d'utiliser à la fois ψ_L et ψ_R (nous mentionnerons plus tard une exception à cette affirmation : les masses de Majorana).

Nous ne pouvons donc nous contenter des représentations irréductibles agissant sur les spineurs ξ et η , mais nous devons en considérer la somme.

2. La seule contrainte portant sur K et K' est $K K' = m^2$. La valeur de K et celle de K' dépendent en principe des normalisations de ψ_L et ψ_R . Sous réserve d'une normalisation adéquate, nous pouvons prendre $K = K' = m$.

Nous observons toutefois ici que ce choix, s'il est commode, reste conventionnel : nous aurions très bien pu choisir, par exemple, $(-m)$.

Etant maintenant convaincus de la nécessité d'impliquer à la fois ψ_L et ψ_R , et ayant normalisé $K = K'$, nous pouvons écrire plus simplement l'équation de Dirac en utilisant les matrices γ (vérifier)

$$i\partial_\mu\gamma^\mu\psi(x) = m\psi(x). \quad (2.6)$$

On vérifie en outre, ainsi qu'il résulte en prenant le "carré" de l'équation, que :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

propriété qui peut d'ailleurs servir de définition aux matrices γ^μ .

Il est commode d'introduire une notation pour la contraction $V_\mu\gamma^\mu$ qui sera souvent rencontrée dans la suite. Traditionnellement :

$$V_\mu\gamma^\mu = V^\mu\gamma_\mu \equiv \not{V}, \quad (2.8)$$

$$\partial_\mu\gamma^\mu = \not{\partial}. \quad (2.9)$$

2.1 Solution en ondes planes

Afin d'élucider le contenu de cette équation, recherchons des solutions en "ondes planes" :

$$\psi(x) = e^{-ipx}\psi(p) \quad (2.10)$$

(nous ne nous soucions pas de normalisation pour l'instant). Il vient :

$$\not{p}\psi(p) = m\psi(p). \quad (2.11)$$

Sans perte de généralité, nous prenons un mouvement selon l'axe 3 positif :

$$p^\mu = (p^0, 0, 0, p^3) \text{ avec } p^3 > 0.$$

L'équation de Dirac devient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p^0 - p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^0 + p^3 \\ p^0 + p^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^0 - p^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

ce qui se ramène au système :

$$\begin{aligned}
(p^0 - p^3) \psi_3 &= m\psi_1, \\
(p^0 + p^3) \psi_4 &= m\psi_2, \\
(p^0 + p^3) \psi_1 &= m\psi_3, \\
(p^0 - p^3) \psi_2 &= m\psi_4,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

qui éclate lui même en deux systèmes. On obtient ainsi, par exemple, pour ψ_2 et ψ_4 :

$$\begin{aligned}
(p^0 + p^3) \psi_4 &= m\psi_2, \\
(p^0 - p^3) \psi_2 &= m\psi_4.
\end{aligned}$$

En combinant les deux équations, on a bien évidemment la condition :

$$\left((p^0)^2 - (p^3)^2 \right) = m^2$$

et les deux solutions (nous avons déjà choisi $p^3 > 0$) :

$$p^0 = \pm \sqrt{(p^3)^2 + m^2} = \pm \omega.$$

Pour la solution d'énergie positive :

$$\psi_2^{(+)} / \psi_4^{(+)} = \frac{\omega + p^3}{m}, \tag{2.13}$$

et pour la solution d'énergie négative :

$$\psi_4^{(-)} / \psi_2^{(-)} = -\frac{\omega + p^3}{m}. \tag{2.14}$$

Nous trouvons, en outre, deux solutions reposant sur les composantes 1 et 3 :

$$\psi_3^{(+)} / \psi_1^{(+)} = \frac{\omega + p^3}{m}, \tag{2.15}$$

$$\psi_1^{(-)} / \psi_3^{(-)} = -\frac{\omega + p^3}{m}. \tag{2.16}$$

Afin de clarifier la signification de ces solutions, nous anticipons sur la suite, et acceptons que dans la représentation présente, la matrice

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

mesure le spin selon l'axe Z. Nous voyons alors que les solutions évoquées ci-dessus correspondent respectivement à :

$$\psi\left(\omega, -\frac{1}{2}\right); \psi\left(\omega, +\frac{1}{2}\right); \psi\left(-\omega, -\frac{1}{2}\right); \psi\left(-\omega, +\frac{1}{2}\right) \quad (2.18)$$

(dans les 2 premiers cas, $\psi_1 = \psi_3 = 0$; dans les 2 derniers, $\psi_2 = \psi_4 = 0$, notation $\psi(p^0, s)$).

Définissons encore *l'hélicité*, c'est-à-dire la projection des spin sur la direction de mouvement :

$$h = \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|p|} \quad (2.19)$$

Les deux premières solutions sont l'hélicité négative (aussi dites lévogyres), les deux dernières, dextrogyres, c'est-à-dire d'hélicité positive.

Deux limites sont intéressantes à envisager ici, la limite ultrarelativiste et la limite statique. Nous noterons les solutions pour $\psi(p^0, p^3, s)$.

Dans la limite ultra-relativiste, $\omega \gg m$ et $p^3 \rightarrow \omega$ (c'est toujours le cas pour les fermions sans masse). On l'obtient en prenant $m \rightarrow 0$ dans les solutions précédentes, et les spineurs se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned} \psi\left(\omega, \omega, -\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi\left(-\omega, \omega, \frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi\left(-\omega, \omega, -\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \psi\left(\omega, \omega, \frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

On voit que, dans cette limite, les deux premières composantes (notées précédemment) correspondent à une particule lévogyre d'énergie positive (ou à une particule dextrogyre d'énergie négative). Les rôles sont inversés pour ψ_R . On remarque donc que, dans la limite ultra-relativiste où ψ_L et ψ_R sont découplés, les indices L et R sont justifiés par l'hélicité des particules d'énergie positive (left et righ-handed).

On se réfère, en général, aux composantes $\psi_L = L\psi$ et $\psi_R = R\psi$ comme aux composantes de *chiralité*. Elles ne se confondent donc avec les composantes d'hélicité que dans la limite ultra-relativiste.

Si nous passons maintenant au référentiel de repôts, nous obtenons au contraire :

$$\begin{aligned} \psi\left(\omega, 0, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \psi\left(-\omega, 0, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \psi\left(\omega, 0, \frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi\left(-\omega, 0, \frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nous devons convenir du peu de commodité de cette représentation, c'est-à-dire du choix particulier de matrices γ que nous avons opéré. Ce choix appelé *représentation chirale* est très adapté aux problèmes de physique de haute énergie et constitue un outil essentiel pour la formulation du modèle standard. S'il faut traiter par contre des problèmes non ou faiblement relativistes (par exemple, en physique atomique), il est préférable de changer de base.

On passe, par exemple, à la *base standard* par la transformation unitaire :

$$(\psi)_{st} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \cdot (\psi)_{chiral} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_L + \psi_R \\ \psi_L - \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi^{st}\left(+\omega, 0, -\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{st}\left(-\omega, 0, -\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \psi^{st}\left(+\omega, 0, +\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{st}\left(-\omega, 0, +\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dans cette limite, on voit que les deux premières composantes sont associées aux solutions d'énergie positive, les deux dernières aux solutions d'énergie négative.

Il pourrait être tentant d'éliminer ainsi les solutions d'énergie négative, en ne gardant que les 2 premières composantes dans la base "standard". C'est bien évidemment impossible, car cette séparation n'intervient que pour une

particule au repos. Dans le cas de particule de faible énergie, ce choix de base permet toutefois de simplifier le calcul en distinguant "petites" et "grandes" composantes.

2.2 Quelques remarques concernant les matrices de Dirac

Ainsi que le lecteur s'en rendra rapidement compte, il existe de multiples variations dans le choix de ces matrices, et la plupart des ouvrages diffèrent par l'une ou l'autre variante dans l'agencement des composantes. La prudence est donc recommandée.

Bien évidemment, (et heureusement!) les propriétés essentielles ne sont pas affectées. Nous reprenons quelques-unes de ces propriétés ci-dessous ; leur vérification est un exercice utile

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad \forall \mu. \quad (2.25)$$

Nous prenons : $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma^\mu &= 0, \\ \text{Tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}, \\ \text{Tr } \gamma_5 &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons, en outre :

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i \end{aligned}$$

Exercice : Vérifier $\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \quad \forall \mu$

Enfin, pour clore ce chapitre, nous remarquerons que, en dépit du passage à des équations linéaires, le problème des solutions à énergie négative n'est pas résolu. En fait, ce passage s'est accompagné d'un doublement de composantes décrivant le fermion, et la résolution du système associé fait réapparaître les solutions d'énergie négative. Cette constatation conduit à une ré-interprétation de formalisme, que nous entreprendrons dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Introduction à la théorie quantique des champs

3.1 Théorie classique

3.1.1 Rappels : Lagrangien et Action pour un point matériel

Soit q , la coordonnée du point, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ et $L = L(q, \dot{q})$. Dans une formulation non relativiste,

$$L = T - V = m \frac{\dot{q}^2}{2} - V$$

et, pour un oscillateur $V = +\frac{kq^2}{2}$.

L'action S est définie par :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (3.1)$$

Les équations d'Euler-Lagrange résultent de la stationnarité (extremum) de l'action par rapport à des variations δq laissant fixes les points extrêmes de la trajectoire :

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0, \quad (3.2)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta(\dot{q}) \right] dt. \quad (3.3)$$

Noter que $\delta\dot{q} = \dot{q}_{\text{varié}} - \dot{q}_{\text{réel}} = \frac{d}{dt}(q_{\text{varié}} - q_{\text{réel}}) = \frac{d}{dt}(\delta q)$.

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right) dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Le premier terme s'annule par (3.2) et il vient :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0\tag{3.5}$$

ce qui reproduit bien l'équation de Newton.

3.1.2 Généralisation

Pour plusieurs coordonnées q_a (par exemple, plusieurs oscillateurs harmoniques), on a

$$L = L(\{q_a\}, \{\dot{q}_a\})\tag{3.6}$$

et il vient, par variation individuelle des q_a

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0.\tag{3.7}$$

3.1.3 Passage au continu

Plutôt qu'un système discret de variables $\{q_a\}$ correspondant à une série d'oscillateurs $\{a\}$, nous voudrions passer à une variable continue.

Nous le faisons à l'occasion d'un exemple, celui d'une série de pendules couplés, de longueur l , et s'écartant d'un angle θ_i de leur position de repos :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m (l\dot{\theta}_i)^2\tag{3.8}$$

$$V = \sum_i V_i\tag{3.9}$$

$$V_i = mgh_i + \frac{1}{2} \frac{1}{2} l^2 K ((\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + (\theta_{i-1} - \theta_i)^2)\tag{3.10}$$

$$(3.11)$$

où ($h_i = l(1 - \cos \theta_i)$). On notera le facteur de $\frac{1}{2}$ supplémentaire dans V par rapport au cas précédent. Il apparaît en raison du double comptage : l'énergie dans le lien $(i - 1, i)$ est comptée à la fois à l'occasion du lien $(i - 1)$ et du lien i ainsi qu'on le vérifie aisément à partir des équations d'Euler-Lagrange. K est la constante de rappel du lien couplant les pendules i et $i + 1$.

Si nous considérons maintenant un ruban oscillant plutôt qu'une succession de pendules, nous pouvons le découper en petits segments $\Delta x = a$ et associer à chacun de ces segments (après passage à la limite) :

$$m = \mu a \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &\rightarrow \theta_x(t) \rightarrow \theta(x, t) \\ \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{a} &\Rightarrow \frac{\theta(x + a, t) - \theta(x, t)}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

il vient :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum \mu \dot{\theta}^2(x, t) l^2 \Delta x \\ &\quad - \sum \mu \Delta x g l (1 - \cos \theta(x, t)) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum \left\{ \frac{(\theta(x + \Delta x, t) - \theta(x, t))^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\theta(x, t) - \theta(x - \Delta x, t))^2}{(\Delta x)^2} \right\} K \Delta x \Delta x. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En posant $K \Delta x \rightarrow k$, on trouve

$$\begin{aligned} L &= l^2 \int \left(\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\mu g}{l} \cdot 1 - \cos \theta(x, t) - \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right) dx \\ &= L(\theta, \partial_t \theta, \partial_x \theta) = \int \mathcal{L}(\theta, \partial_t \theta, \partial_x \theta) dx \\ S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(\theta, \partial_t \theta, \partial_x \theta). \end{aligned}$$

On peut unifier la notation (en particulier dans une perspective relativiste) en posant :

$$L = L(\theta, \partial_\mu \theta); \quad S = \int \mathcal{L} dx dt \quad (3.15)$$

A 3 + 1 dimensions, on remplacera simplement dx par d^3x , $d^3x dt$ par d^4x et $\mu = 0, 1, 2, 3$. Les équations d'Euler-Lagrange sont formellement inchangées.

Toutefois, il faut maintenant inclure non seulement les variations $\delta\theta$ et $\delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)$ mais encore $\delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right)$. Il vient pour $S = \int \mathcal{L} d^4x$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}\right)} = 0 \quad (3.16)$$

(on somme sur les indices μ) où il faut garder en mémoire que θ est maintenant une "variable généralisée" dépendant de x^μ .

A titre d'exemple, pour θ petit, on obtient pour le \mathcal{L} envisagé précédemment :

$$\mu \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\mu g\theta}{l} = 0.$$

Si l'on ignore le dernier terme, on retrouve évidemment l'équation d'onde avec

$$v = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (3.17)$$

Remarque importante :

Il n'est pas inutile de s'interroger sur la signification exacte de la dérivée $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$ apparaissant dans l'équation (3.16). Si l'on compare à (3.7), on y trouve une dérivée totale par rapport au temps $\left(\frac{d}{dt}\right)$ alors qu'il semblerait s'agir ici, d'après la notation, d'une dérivée partielle!

En fait, il s'agit d'un piège de notation : il faut ici aussi prendre la dérivée "complète" par rapport à chacune des variables x^μ , c'est-à-dire en incluant la dépendance en x^μ des θ et $\dot{\theta}$, ainsi qu'une dépendance explicite éventuelle. Le fait d'utiliser la notation $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$ résulte simplement de la présence des 4 variables x^μ . Une notation $\frac{d}{dx^\mu}$, mais avec la réserve que les 4 x^μ restent indépendantes serait plus appropriée. La pratique consiste toutefois à utiliser la notation de (3.16). Le plus souvent, \mathcal{L} n'a d'ailleurs pas de dépendance explicite en x^μ , et l'ambiguïté est évitée.

Dans les rares cas (voir théorème de Noether, ci-dessous) où une ambiguïté persisterait, nous utiliserons une notation ad-hoc, ∂_{tot} pour désigner la dérivation "complète".

Généralisation au cas relativiste : Il suffit de demander l'invariance relativiste de S , ou encore (pour la relativité restreinte) de la densité lagrangienne de \mathcal{L} .

3.2 Exemples de Lagrangiens Relativistes

Nous devons écrire des densités Lagrangiennes qui

- soient au minimum invariantes sous le groupe L_+^\uparrow
- reproduisent les équations du mouvement, c'est-à-dire l'équation de Klein-Gordon pour les champs scalaires, ou l'équation de Dirac pour les fermions.

(Remarque : on peut aussi partir du Lagrangien le plus général pour établir ces équations moyennant des hypothèses assez faibles, comme la renormalisabilité par exemple).

Nous nous contentons, pour le moment, de *champs libres* c'est-à-dire de \mathcal{L} quadratiques et sans couplage entre les divers champs.

Nous demandons, en outre, l'hermiticité du Lagrangien. On vérifie alors aisément que

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi} \not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (3.18)$$

et

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi \quad (3.19)$$

répondent aux demandes.

Notons que, dans le cas d'un champ complexe, on peut prendre comme variables indépendantes soit les parties réelle et imaginaire $\left(\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)\right)$, soit le champ et son conjugué (ϕ, ϕ^\dagger) , voire, pour les champs de Dirac, le conjugué de Pauli $(\psi, \bar{\psi})$.

Nous traiterons plus loin le cas du champ vectoriel, en particulier électromagnétique. Notons d'ores et déjà que l'expression bien connue

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

est un autre exemple évident de \mathcal{L} des champs libres.

3.3 Développement des champs et opérateurs de création/annihilation

Si nous voulons passer à une formulation quantique, le plus simple consiste à reformuler les champs ϕ comme des sommes d'opérateurs de création et d'annihilation, agissant sur l'espace des états. Il s'agit tout simplement de

copier le cheminement adapté dans les cours de mécanique quantique pour l'oscillateur harmonique.

La difficulté provient ici à la fois du fait que nous traitons "un oscillateur en chaque point", et que les modes du développement ne sont pas formulés en fonction des oscillations de chaque oscillateur, mais plutôt en fonction des modes "collectifs", c'est-à-dire des ondes planes ébranlant les oscillateurs par vagues successives. Désignant par \vec{k} le vecteur d'onde, on obtient :

$$\phi = \sum_{k^0=\pm\omega} \int d^3k N(k) a_{\vec{k},k^0} e^{-ikx}. \quad (3.21)$$

Remarquons que pour que ϕ soit solution de l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2) \phi = 0, \quad (3.22)$$

il faut que k dans l'exponentielle représente le 4-vecteur énergie-impulsion avec $k^2 = k^{02} - \vec{k}^2 = m^2$. Le choix $k^0 = \pm\omega$ correspond aux deux solutions (énergie > 0 ou < 0) de l'équation, et $N(k)$ est une normalisation à fixer.

Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, les opérateurs a_k et leurs hermitiens conjugués (ce sont maintenant des matrices agissant sur l'espace des états) a_k^\dagger servent à détruire et créer des quanta. Soit un état comprenant une particule de 4-impulsion \vec{k} et d'énergie k^0 , $|\vec{k}, k^0\rangle$, on a :

$$a_{\vec{k},k^0}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, k^0\rangle. \quad (3.23)$$

L'opérateur a agit alors comme opérateur de destruction :

$$\langle \vec{k}, k^0 | a_{\vec{k},k^0} = \langle 0 |. \quad (3.24)$$

On entrevoit ici une solution au problème des $k^0 < 0$. En effet, nous introduisons la notion d' "antiparticule" et remplaçons l'opérateur *de destruction d'une particule* (a) par un opérateur *de création d'antiparticule* (b^\dagger) selon :

$$a_{\vec{k},-\omega} \longrightarrow b_{-\vec{k},\omega}^\dagger. \quad (3.25)$$

Le choix est opéré de façon à conserver tous les nombres quantiques. Ainsi, la destruction d'une énergie $(-\omega)$ équivaut à la création d'une énergie $+\omega$, la destruction de \vec{k} à la création de $(-\vec{k})$. Dans le cas des fermions, s'y ajoute le spin :

$$a_{\vec{k},-\omega,s} \longrightarrow b_{-\vec{k},\omega,-s}^\dagger \quad (3.26)$$

où s désigne le spin dans une direction donnée. b^\dagger agit alors pour créer une antiparticule.

Revenons à l'équation 3.21, nous avons donc

$$\phi = \int d^3k N(k) \left(a_{\vec{k},\omega} e^{-ikx} + a_{\vec{k},-\omega} e^{-i(k^0x^0 - \vec{k}\vec{x})} \right). \quad (3.27)$$

Nous pouvons changer \vec{k} en $-\vec{k}'$ dans le second terme, ce qui donne (l'intégrale est invariante, car il faut tenir compte d'un signe pour le changement des bornes d'intégration, et de $d^3k' = -d^3k$)

$$\int d^3k' N(k') a_{-\vec{k}',-\omega} e^{-i(-\omega x^0 + \vec{k}'\vec{x})}, \quad (3.28)$$

ou encore, en remplaçant la variable de sommation k' par k (on a supposé $N(k) = N(-k)$)

$$\phi = \int d^3k N(k) \left(a_{\vec{k},\omega} e^{-ikx} + b_{\vec{k},\omega}^\dagger e^{ikx} \right). \quad (3.29)$$

Remarquons que maintenant, k^0 est toujours positif. Nous pouvons donc à l'avenir omettre l'indice ω dans (3.29)

$$\phi = \int d^3k N(k) \left(a_{\vec{k}} e^{-ikx} + b_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right). \quad (3.30)$$

Le cheminement est similaire pour les spineurs. Comme déjà évoqué, le développement doit comprendre un spineur pour chaque type de solution. Pour un \vec{k} donné, il y a 4 solutions, selon les valeurs de k^0 et de s_z , par exemple :

$$\psi_{(x,t)} = \sum_s \sum_{k^0=\pm\omega} \int d^3k a_{\vec{k},k^0,s} u(\vec{k}, k^0, s) e^{-ikx} N'(k). \quad (3.31)$$

Les fonctions u sont des spineurs, mais se comportent par ailleurs comme des c -nombres (voir plus haut les solutions explicites).

Le choix de normalisation est ici double : nous pouvons d'une part fixer la norme des u , d'autre part N' . Divers choix sont possibles mais dans la suite, nous supposons les u normés de façon telle que :

$$\sum_s u(\vec{k}, k^0, s) \bar{u}(\vec{k}, k^0, s) = P_+ = \not{k} + m \quad (3.32)$$

(vérifier à titre d'exercice que ce choix est compatible avec les solutions de l'équation de Dirac). Cette relation traduit simplement l'effet de projection et la relation de complétude : la multiplication à gauche pour $\bar{u}(k, s)$ projette sur l'état (k, s) et, en effectuant la somme, on projette sur un état de 4-impulsion k et de masse m . Comme il s'agit uniquement des u , P_+ projette sur l'espace des solutions à énergie positive c'est-à-dire des particules (par opposition aux antiparticules). Dans le cas plus familier de vecteurs tridimensionnels, cela revient à écrire :

$$\vec{V} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{V}_i) \quad (3.33)$$

$$P_+(k) \psi(k) = (\not{k} + m) \psi(k) = 2m\psi(k)$$

(Notons que de nombreux auteurs utilisent une autre normalisation des spineurs qui conduit alors à $\tilde{P}_+ = \frac{\not{k} + m}{2m}$, et $\tilde{P}_+ \psi = \psi$).

Pour passer aux antiparticules, nous devons re-définir les spineurs correspondant aux solutions d'énergie négative :

$$u(\vec{k}, -\omega, s) \equiv v(-\vec{k}, \omega, -s), \quad (3.34)$$

il vient alors :

$$\sum_s v(\vec{k}, \omega, s) \bar{v}(\vec{k}, \omega, s) = \not{k} - m \quad (3.35)$$

Désormais, nous omettrons $\pm\omega$ dans les u et les v , en convenant que $u(\vec{k}, s) \equiv u(\vec{k}, +\omega, s)$ et $v(\vec{k}, s) \equiv v(\vec{k}, -\omega, s)$ de sorte que

$$P_+(k) = \sum_s u(\vec{k}, s) \bar{u}(\vec{k}, s) = \not{k} + m \quad (3.36)$$

$$P_-(k) = \sum_s v(\vec{k}, s) \bar{v}(\vec{k}, s) = \not{k} - m \quad (3.37)$$

projettent respectivement sur les états à énergie positive de particules et d'antiparticules.

N' , tout comme N , sera fixé dans la suite. On obtient sans peine, par les mêmes manipulations que supra :

$$\psi(x, t) = \sum_s \int d^3k N'(k) \left(a_{\vec{k}, s} u(\vec{k}, s) e^{-ikx} + b_{\vec{k}, s}^\dagger v(\vec{k}, s) e^{ikx} \right) \quad (3.38)$$

Seules des $k^0 > 0$ sont maintenant utilisés, nous avons supprimé k^0 ou ω de l'expression.

3.4 Quantification et relation spin-statistique

3.4.1 Tenseur d'énergie impulsion

Avant de passer à la quantification proprement dite, nous voulons d'abord établir la forme du tenseur énergie-impulsion, et obtenir ainsi l'expression de l'énergie du système. Nous procédons à travers le théorème de Noether, qui associe à toute symétrie continue de l'action un courant conservé.

Dans le cas d'espace, nous considérons les translations dans l'espace à 4 dimensions :

$$x' = x + a \quad (3.39)$$

La variation totale de la densité Lagrangienne s'écrit :

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) \quad (3.40)$$

$$\delta\mathcal{L} = a_\mu \partial_{tot}^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad (3.41)$$

on note ici que l'on a à droite la dérivée "complète" de \mathcal{L} par rapport à chacun des x^μ , et ce à travers la dépendance de ϕ et $\partial_\mu\phi$, tandis que le dernier terme a trait à la dépendance *explicite* de \mathcal{L} en x . Les deux types de dérivées sont distinguées, comme déjà annoncé, par l'emploi de ∂_{tot} dans le membre de gauche.

Si nous supposons que \mathcal{L} ne dépend pas *explicitement* de x , le dernier terme à droite tombe. Nous utilisons, les équations du mouvement :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0, \quad (3.42)$$

$$a_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi). \quad (3.43)$$

En observant que

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi), \quad (3.44)$$

on trouve :

$$a_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right). \quad (3.45)$$

On voit que \mathcal{L} n'a, en fait, pas besoin d'être strictement invariant. En effet, la quadridivergence dans le membre de gauche correspond, au niveau de l'action

S à un terme de bord. Avec

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} a^\mu, \quad (3.46)$$

il vient :

$$a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \partial_\mu\phi \right) - a^\mu \partial_\mu\mathcal{L} = 0. \quad (3.47)$$

Si nous définissons le tenseur d'énergie-impulsion

$$T^\nu{}_\beta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - \delta^\nu_\beta \mathcal{L}, \quad (3.48)$$

nous vérifions que

$$\partial_\nu T^\nu{}_\beta = 0 \quad (3.49)$$

c'est-à-dire, la loi de conservation annoncée. On en déduit la conservation de l'énergie-impulsion de l'ensemble du système, par intégration sur tout l'espace :

$$\int_V (\partial_0 T^\beta_0 + \partial_i T^\beta_i) d^3x = 0. \quad (3.50)$$

Lorsque $V \longrightarrow \infty$, le deuxième terme, qui représente le flux à travers la surface, tend vers zéro. En posant

$$P_\beta = \int T_{0\beta} d^3x, \quad (3.51)$$

on a :

$$\partial_0 P_\beta = 0 \quad (3.52)$$

montrant qu'il s'agit bien d'une quantité conservée.

Avant d'appliquer ces considérations au cas des champs scalaires ou fermioniques libres, notons encore qu'en pratique, \mathcal{L} dépend en général, de plusieurs champs (notamment ϕ et ϕ^\dagger pour un champ complexe, ψ et $\bar{\psi}$ pour un fermion). Notant génériquement ϕ_i pour chacun de ces champs (y compris les conjugués), nous l'écrivons donc :

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \frac{\partial\phi_i}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.53)$$

3.4.2 Pour rappel : oscillation harmonique

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} (m\dot{q}^2 - kq^2) & (3.54) \\
 p &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \\
 H &= \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{m} + kq^2 \right]
 \end{aligned}$$

Solution classique : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (a(\omega) e^{-i\omega t} + a^\dagger(\omega) e^{i\omega t}) \quad (3.55)$$

où, classiquement, $a(\omega)$ et $a^\dagger(\omega)$ sont de simples coefficients, fonction de ω ,

$$p(t) = \frac{i\omega m}{\sqrt{2m\omega}} [-a(\omega) e^{-i\omega t} + a^\dagger(\omega) e^{i\omega t}]. \quad (3.56)$$

Les relations de quantification canonique conduisent à interpréter p et q comme des opérateurs, et par là, de même pour les a et a^\dagger . Les commutateurs à temps égaux ($\hbar = 1$)

$$[q(t), p(t)] = i \quad (3.57)$$

s'avèrent alors équivalents à

$$[a(\omega), a^\dagger(\omega)] = 1. \quad (3.58)$$

Il vient alors :

$$H = \omega \left(a^\dagger(\omega) a(\omega) + \frac{1}{2} \right) \quad (3.59)$$

où $a^\dagger a$ compte les quanta dans le mode ω , et $\frac{1}{2}$ représente l'énergie de repos. On a :

$$a(\omega)^\dagger |0\rangle = |\omega\rangle. \quad (3.60)$$

et un état avec n quanta est décrit par :

$$a^\dagger(\omega) \dots a^\dagger(\omega) |0\rangle = |\omega, \dots, \omega\rangle. \quad (3.61)$$

3.4.3 Energie et quantification de champ scalaire

Pour un champ scalaire complexe :

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (3.62)$$

Nous déduisons aisément l'expression du tenseur d'énergie impulsion (prendre ϕ et ϕ^\dagger comme champs indépendants). Notons, dès à présent, que l'ordre des champs ϕ et ϕ^\dagger dans (3.62) est arbitraire au niveau classique (nous y reviendrons plus loin).

$$T_\beta^0 = \partial^0 \phi^\dagger \partial_\beta \phi + \partial^0 \phi \partial_\beta \phi^\dagger - g_\beta^0 (\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi). \quad (3.63)$$

En particulier :

$$H = T^{00} = \partial^0 \phi^\dagger \partial_0 \phi + m^2 \phi^\dagger \phi - \sum_i (\partial_i \phi^\dagger \partial_i \phi) \quad (3.64)$$

On insère le développement de ϕ et ϕ^\dagger en ondes planes pour obtenir :

$$\begin{aligned} H = & \int d^3 p d^3 k N(p) N(k) \\ & \cdot \left(a_k^\dagger a_p \left(\omega_p \omega_k + m^2 + \vec{k} \cdot \vec{p} \right) e^{i[(\omega_k - \omega_p)t - (\vec{k} - \vec{p})\vec{x}]} \right. \\ & + b_k b_p^\dagger \left(\omega_p \omega_k + m^2 + \vec{k} \cdot \vec{p} \right) e^{-i[(\omega_k - \omega_p)t - (\vec{k} - \vec{p})\vec{x}]} \\ & + a_k^\dagger b_p^\dagger \left(-\omega_p \omega_k + m^2 - \vec{k} \cdot \vec{p} \right) e^{-i[(\omega_k + \omega_p)t - (\vec{k} - \vec{p})\vec{x}]} \\ & \left. + a_k b_p \left(-\omega_p \omega_k + m^2 - \vec{k} \cdot \vec{p} \right) e^{+i[(\omega_k + \omega_p)t - (\vec{k} - \vec{p})\vec{x}]} \right). \quad (3.65) \end{aligned}$$

Il suffit d'intégrer sur l'espace $d^3 x$ pour obtenir $(2m)^3 \delta(k \pm p)$ selon le cas. Les deux derniers termes disparaissent alors en fonction des équations du mouvement :

$$H = \int \mathcal{H} d^3 x = \int d^3 k (2\pi)^3 N^2(k) 2\omega_k^2 \left(a_k^\dagger a_k + b_k b_k^\dagger \right). \quad (3.66)$$

Il est utile de comparer cette expression avec celle obtenue pour l'oscillation harmonique. On y trouve en effet l'opérateur de comptage $a_k^\dagger a_k$ qui, appliqué à l'état $a_p^\dagger \dots a_p^\dagger |0\rangle$ par exemple, compte le nombre de quanta pour chaque mode d'impulsion \vec{k} . Ceci suggère de normer les champs pour obtenir ici l'expression de l'énergie, ce qui demande

$$N^2(k) (2\pi)^3 2\omega_k^2 = \omega_k, \quad (3.67)$$

ou encore

$$N(k) = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.68)$$

Par contre, nous ne trouvons pas directement dans (3.66) l'expression de l'énergie de repos" des oscillateurs (qui devrait être $\frac{1}{2}\omega k$ pour chaque mode k).

Le terme relatif aux antiparticules conduit cependant à une énergie infinie pour le vide. En effet, pour chaque mode k , l'opérateur de création se trouve à droite de l'opérateur de destruction :

$$\langle 0|b_k b_k^\dagger|0\rangle. \quad (3.69)$$

Remarquons au passage que le fait que les opérateurs relatifs aux particules soient dans l'ordre souhaité, mais pas ceux des antiparticules est purement fortuit, et lié à l'ordre des ϕ et ϕ^\dagger , choisi arbitrairement dans le Lagrangien initial. Nous voulons donc remplacer dans (3.66)

$$b_k b_p^\dagger = b_p^\dagger b_k + \mathcal{X}. \quad (3.70)$$

\mathcal{X} est fixé en prenant la valeur dans le vide :

$$\delta^3(k-p) = \langle 0|b_k b_p^\dagger|0\rangle = \langle 0|b_p^\dagger b_k|0\rangle + \langle 0|\mathcal{X}|0\rangle. \quad (3.71)$$

Dès lors :

$$[b_k, b_p^\dagger] = \delta^3(k-p). \quad (3.72)$$

Notons que la substitution de (3.72) dans (3.66) conduirait à une quantité indéfinie, $\delta(0)$. Pour interpréter cet artefact, nous pouvons procéder de plusieurs manières, qui reposent toutefois sur un volume fini.

Dans le cas d'un volume fini, les modes propres sont discrets. Le δ^3 de Dirac est remplacé par δ de Kronecker, et on aurait :

$$H = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k + 1 \right) \quad (3.73)$$

ce qui reproduit bien le résultat de l'oscillateur harmonique ($(\frac{\omega}{2})$ pour l'énergie de repos de chaque oscillateur qu'il s'agisse de particule ou d'antiparticule).

Alternativement, nous pouvons remonter à (3.65) et, ne retenant que les 2 premiers termes, obtenir, après commutation des b :

$$H = \int d^3x \int dp^3 dk^3 N(\phi) N(k) \left(\omega_p \omega_k + m^2 + \vec{k} \cdot \vec{p} \right) *$$

$$* \left(a_k^\dagger a_p e^{i((\omega_k - \omega_p)t - (\vec{k} - \vec{p})x)} + b_p^\dagger b_k e^{-i((\omega_k - \omega_p)t - (\vec{k} - \vec{p})x)} \right) + \delta^3(p - k) e^0$$

Le dernier terme se réduit alors formellement à

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \int d^3k \omega_k \quad (3.74)$$

où l'on retrouve bien le terme 1 pour chaque mode, l'intégration sur x fournissant un facteur de volume, $\frac{V}{(2\pi)^3}$ qui correspond à la normalisation des états (voir plus loin).

Il est toutefois d'usage, mais nullement obligatoire¹, de définir l'énergie *en ordre normal* c'est-à-dire après soustraction de cette énergie de repos (ou du vide). Le recours à l'ordre normal permet toutefois d'éviter dans les calculs courants une constante infinie et omniprésente. On note :

$$: H := \int d^3k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k \right). \quad (3.75)$$

Nous obtenons ainsi une énergie parfaitement définie moyennant la quantification des opérateurs par les relations de commutation :

$$[b_k, b_p^\dagger] = \delta^3(k - p). \quad (3.76)$$

Comme nous l'avons souligné, le choix de commuter les b plutôt que les a tient uniquement à l'écriture initiale de Lagrangien ; en outre, $b(\omega, k) = a^\dagger(-\omega, -k)$, on écrit donc :

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta^3(k - p). \quad (3.77)$$

Les commutations des opérateurs a et b , ou a entre eux sont triviales :

$$[a, b] = [a^\dagger, b] = [a, a] = \dots = 0. \quad (3.78)$$

3.4.4 Exercices

- Vérifier l'énergie d'un système de 2 particules dans l'état p :

$$a_p^\dagger a_p^\dagger |0\rangle = |p; p\rangle.$$

¹Dans un contexte de relativité générale la densité d'énergie du vide est liée à la constante cosmologique.

- Calculer les autres composantes de la 4-impulsion.
- Lien avec la quantification canonique : nous avons quantifié ici le champ bosonique en imposant les mêmes relations de commutation entre opérateurs de création et d'annihilation que pour l'oscillation harmonique. Dans ce dernier cas, c'est équivalent à la quantification canonique, c'est-à-dire aux commutateurs à temps égaux :

$$[q(t), p(t)] = i\hbar.$$

Vérifier que l'on a également :

$$[\phi(x), \pi(x)]|_{x^0=x'^0} = i\delta^3(x-x') \quad (3.79)$$

où

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (3.80)$$

3.4.5 Energie et quantification du champ spinoriel

Un raisonnement entièrement similaire au précédent (et laissé à titre d'exercice) conduit à :

$$H = \sum_s \int d^3k \omega_k \left(a_{k,s}^\dagger a_{k,s} - b_{k,s} b_{k,s}^\dagger \right) \quad (3.81)$$

(nous avons utilisé la même normalisation).

Le fait nouveau est la présence d'un signe négatif entre les deux contributions, et est lié au nombre impair (1) de dérivées dans le \mathcal{L} des spineurs (tandis que celui des bosons est quadratique). Pour ré-écrire H dans l'ordre normal, et pour obtenir une énergie positive, nous devons cette fois imposer :

$$b_{k,s} b_{k',s'}^\dagger = -b_{k',s'}^\dagger b_{k,s} + \mathcal{X} \quad (3.82)$$

et nous déterminons \mathcal{X} à partir des valeurs dans le vide pour obtenir :

$$\left\{ b_{k,s} b_{k',s'}^\dagger \right\} = \delta^3(k-k') \delta_{ss'} \quad (3.83)$$

où $\{ \}$ dénote l'anticommutateur $bb^\dagger + b^\dagger b$ parfois aussi noté $\llbracket \rrbracket_+$.

Cette relation d'anticommutation, une fois encore équivalente à la quantification canonique (avec anticommutateur) impose la relation spin-statistique ! En effet, on vérifiera (exercice) qu'il est impossible de mettre deux quanta de Ψ dans le même état :

$$a_{k,s}^\dagger a_{k,s} a_{k,s}^\dagger a_{k,s} |0\rangle. \quad (3.84)$$

3.4.6 Courant de charge

Exercice : Appliquer le théorème de Noether à la transformation $\phi \rightarrow \phi' = e^{ix}\phi$ (ou à son équivalent fermionique).

On trouve la conservation d'un courant (différent de la 4-impulsion) :

$$J_\mu = \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \quad (3.85)$$

où

$$\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu \quad (3.86)$$

est la différence entre la dérivée de facteur de droite et du facteur de gauche.

On vérifie que ce courant porte des signes opposés pour particules et antiparticules. Lorsque sera introduit l'électromagnétisme, ce courant sera identifié avec le courant électrique. Particules et antiparticules ont donc des charges égales en valeur et opposées en signe.