

# Le modèle Standard des Interactions Faibles et Electromagnétiques

## 1. Modèle de Fermi

### 1.1. UNITÉS ET ORDRES DE GRANDEUR

Pour tous les calculs théoriques, nous utiliserons

$$\hbar = c = 1$$

Ce choix nous permet d'exprimer les grandeurs rencontrées en termes d'une seule unité d'énergie ou de masse.

Par exemple :  $E = h\nu$

on a donc, pour le temps :

$$[T] = [\hbar][E]^{-1} = [E]^{-1}$$

$$E = m.c^2$$

$$[E] = [M][c^2] = [M]$$

et pour les longueurs :

$$[L] = [c][T] = [E]^{-1}$$

On choisit en général une unité d'énergie, qui correspond au paramètre le plus important des accélérateurs utilisés pour la physique des particules élémentaires. Le choix traditionnel est l'électron-volt (eV) et ses multiples (keV, MeV, GeV, TeV).

Pour mémoire, on notera le lien au système MKS :

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ eV}/c^2 = 1.78 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$$

Lors de calculs de grandeurs physiques, tels les temps de vie ou les sections efficaces, les

facteurs de conversion suivants s'avèrent utiles :

$$\begin{aligned}\hbar &= 6.58 \cdot 10^{-25} \text{ GeV}\cdot\text{s} \\ \hbar c &= 197.5 \text{ MeV } 10^{-15} \text{ m}\end{aligned}$$

Il est aussi de tradition de mesurer les sections efficaces en (milli)-barn :

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

De façon à nous familiariser avec ces unités, considérons une échelle d'énergie de 1 GeV. On y associerait une particule de masse 1 GeV/c<sup>2</sup> (par ex., le proton ou le neutron), un temps typique de

$$\tau = \frac{\hbar}{1 \text{ GeV}} = 6.58 \cdot 10^{-25} \text{ s.}$$

et une section efficace de :

$$\sigma = \frac{(\hbar c)^2}{1 \text{ GeV}^2} \simeq 4 \cdot 10^{-32} \text{ m}^2 = .4 \text{ mbarn.}$$

Un coup d'oeil rapide à la "Particle Data Table" nous montre que les sections efficaces d'interactions fortes à cette énergie sont de l'ordre de 10 mbarn.

En ce qui concerne les temps de vie, nous voulons maintenant comparer deux particules de masse semblable :

le  $f_2(1720 \text{ MeV})$  qui se désintègre par interactions fortes, a un temps de vie de  $6 \cdot 10^{-24} \text{ s}$

tandis que

le  $\tau(1784 \text{ MeV})$  qui ne se désintègre que par interaction faible a un temps de vie de  $3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ .

Ce rapport de plus de 10 ordres de grandeur, pour des particules de masses presque identiques, justifie largement l'appellation d'interactions faibles. Nous souvenant que le temps de vie est proportionnel à  $|\mathcal{M}|^{-2}$ , où  $\mathcal{M}$  est l'élément de matrice de transition entre état final et initial  $\langle f|i \rangle$ , nous voyons que, dans un certain sens, les constantes de couplages forte et faible doivent, à l'énergie considérée, se trouver dans un rapport  $G_{\text{faible}}/G_{\text{fort}} \simeq 10^{-5}$ . (Nous préciserons cette notion dans la suite).

On trouvera dans : T.D. Lee "Particle Physics and Introduction to Field Theory" une discussion remarquable des ordres de grandeur des processus rencontrés en physique des hautes énergies (Chapitre 8).

### Quelques Références utiles

C. Quigg : Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, Benjamin Cummings 1983.

G. Kane : Modern Elementary Particle Physics - Quarks, Leptons and Their Interactions, Add. Wesley.

E. Leader and E. Predazzi : An introduction to gauge theories and the "new physics", Cambridge Univ. Press 1982.

Nelipa : Physique des Particules Élémentaires, ed. Moscou (MIR).

Okun : Leptons and Quarks, North Holland 1982.

Halzen et Martin : Quarks and Leptons, John Wiley and Sons 1984.

S. Bilenky : Introduction to the Physics of Electroweak interactions, Pergamon press 1982.

## 1.2. LAGRANGIEN ET CHAMPS LIBRES

(voir cours 1<sup>ère</sup> licence)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) & \quad \text{champ scalaire réel libre} \\
 \partial^\mu \phi^+ \partial_\mu \phi - m^2 \phi^+ \phi & \quad \text{champ scalaire complexe} \\
 \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi & \quad \text{champ spinoriel}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

où l'on a utilisé :  $\partial^\mu \gamma_\mu \equiv \partial\!\!\!/$

Quantification du champ scalaire complexe :

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} [a(k)e^{-ikx} + b^+(k)e^{ikx}] \\
 \phi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} [a^+(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}] \\
 k^0 = \omega &= (\vec{k}^2 + m^2)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

où l'on a introduit les opérateurs de création et de destruction :

- a(k) détruit un quantum d'impulsion k, d'énergie  $\omega$   
(particule, charge e si l'on introduit l'électromagnétisme)
- a<sup>+</sup>(k) crée ...
- b(k) détruit une antiparticule (charge -e)
- b<sup>+</sup>(k) crée une antiparticule

Propagateur de Feynman :

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\phi(x)\phi^+(y)|0\rangle &= i\Delta_F(x-y) \\
 \Delta_F(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 (\square_x + m^2)\Delta_F(x) &= -\delta^4(x)
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Quantification du champ spinoriel :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_s (b_s(\vec{k})u_s(\vec{k})e^{-ikx} + d_s^+(\vec{k})v_s(\vec{k})e^{ikx})
 \tag{1.4}$$

$b_s$  détruit une particule d'impulsion k, d'énergie  $\omega$ ,

de charge  $e$  et de spin  $s$   
 $d_s$  détruit une antiparticule d'impulsion  $k$ , d'énergie  $\omega$   
de charge  $-e$  et de spin  $+s$

$$iS_{ab}^F(x-y) = \langle 0 | T \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle$$

$$S_{ab}^F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{(\not{k} + m)_{ab}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.5)$$

N.B. : nous utilisons une normalisation différente de celle du cours de 1<sup>ère</sup> licence; la normalisation adoptée ici a pour but de symétriser le traitement des bosons et fermions. Elle correspond à normer les spineurs de telle sorte que :

$$\bar{u}_p u_p = 2m$$

(Pour les neutrinos en particulier, on peut garder  $m$  tout au long du calcul et poser  $m = 0$  dans le résultat; de façon plus concrète, on peut dans ce cas normer directement  $u^+ u$ ).

Les normalisations (1.2) et (1.4) ont été choisies, en combinaison avec les relations de commutation des bosons

$$[a(p), a^+(p')] = \delta^3(p - p') \quad (1.6)$$

ou d'anticommutation des fermions :

$$\{b_s(p), b_{s'}^+(p')\} = \delta^3(p - p') \delta_{ss'} \quad (1.7)$$

de telle sorte que les courants :

$$j^\mu =: \phi_{(x)}^+ i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi(x):$$

$$= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p} \sqrt{2\omega_{p'}}} (p_\mu + p'_\mu) (a_p^+ a_{p'} e^{i(p'-p)x} - b_p^+ b_{p'} e^{i(p-p')x})$$

$$+ \text{termes en } (p_\mu - p'_\mu)$$
(1.8)

agissant sur les états à une particule :

$$|k\rangle = a_k^+ |0\rangle$$

donnent

$$\langle k' | j^\mu | k \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu + k'^\mu}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} e^{i(k'-k)x} \quad (1.9)$$

intégrant sur tout l'espace :

$$\langle k' | \int j^0 d^3x | k \rangle = \delta^3(k' - k) \frac{2k^0}{2\omega_k} = \delta^3(k' - k) \quad (1.10)$$

C'est la normalisation "à un  $\delta$  de Dirac". En termes plus concrets, si l'on prend  $k \equiv k'$  dans (1.9) avant d'intégrer sur le volume fini  $V$ , on obtient au lieu de (1.10)

$$\langle k | \int j^0 d^3x | k \rangle = V/(2\pi)^3 \quad (1.11)$$

[en d'autres termes,  $1/(2\pi)^3$  particules d'impulsion  $k$  par unité de volume].

Exercices :

- 1) vérifier que  $b_k^+$  crée une antiparticule (signe de la charge  $j^0$  opposé)
- 2) effectuer le même calcul pour le courant fermionique  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ .

### 1.3. MATRICE DE TRANSITION

Notre but n'est bien évidemment pas de nous confiner aux champs libres, mais de calculer les taux d'interactions et les temps de vie des particules sous l'effet des forces électro-faibles.

A cet effet, on considère une approximation "adiabatique" où les particules "à grande distance" n'évoluent que sous l'effet de l'Hamiltonien libre (cf les champs introduits en 1.2) (remarquons que la séparation entre H. libre et d'interaction est arbitraire; il s'agit en général de séparer une composante aisément soluble et une composante susceptible d'être traitée comme perturbation).

En termes de ces champs initiaux et finals (!) décrits dans une base unique, la transition entre état final  $|f\rangle$  et initial  $|i\rangle$  s'écrit :

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (1.12)$$

où

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{\langle 0|U(t)|0 \rangle} \quad (1.13)$$

et  $U$  possède le développement perturbatif :

$$U(t) = T e^{-i \int_{-\infty}^t d^4x \mathcal{H}_I(x)} \quad (1.14)$$

où  $T$  est l'opérateur d'ordonnement dans le temps, et  $\mathcal{H}_I$  la densité hamiltonienne d'interaction, exprimée en fonction des champs asymptotiques  $\phi_{in}$ .

#### 1.4. EXEMPLE : DÉSINTÉGRATION DU MUON

A titre d'exemple, nous traitons de façon phénoménologique la désintégration du  $\mu$ . Comme l'électron, le muon est un fermion, et, étant dénué d'interactions fortes, un lepton. Sa masse est de  $105.7 \text{ MeV}/c^2$  (rappel :  $c = 1!$ ).

Il se désintègre en un électron, et la répartition d'énergie de celui-ci indique la présence d'au moins deux particules neutres. L'expérience a établi qu'il s'agissait de 2 fermions neutres distincts,  $\nu_e$  et  $\nu_\mu$  :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (1.15)$$

l'interaction paraît locale; on tentera donc d'écrire un Lagrangien d'interaction n'impliquant que les quatre fermions, sans intermédiaire.

Nous écrirons en toute généralité si nous excluons les dérivées :

$$-\mathcal{L}_{int} = \frac{4G}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \alpha_i \psi_{\nu_e} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \alpha_j \psi_\mu C_{ij} + h.c. \quad (1.16)$$

où le facteur  $\frac{4G}{\sqrt{2}}$  est introduit pour des raisons historiques; les  $\alpha_i (i = 1, \dots, 5)$  représentent les familles de matrices :  $1; \gamma_5; \sigma_{\mu\nu}; \gamma_\mu; \gamma_\mu \gamma_5$ . L'invariance sous le groupe de Lorentz propre dicte que seuls les coefficients  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{45}, C_{54}$  et  $C_{55}$  soient non nuls. En outre, les coefficients  $C_{ij}$  avec  $i \neq j$  allient scalaires et pseudoscalaires ou vecteurs et pseudovecteurs, et traduisent donc la violation de la parité [nous savons qu'il faut en tenir compte dans les interactions faibles, voir le dilemme  $\theta - \tau$  et l'expérience de Wu -<sup>60</sup> Co cours de 1<sup>ère</sup> lic.]

Dans le cas présent (pas de dérivées),  $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$ .

Evaluant (1.14) entre les états :

$$|\mu\rangle = b_{q_1}^+ |\mu\rangle |0\rangle$$

et

$$\langle e\nu_\mu \bar{\nu}_e | = \langle 0 | b_{q_2, e} d_{q_3, \nu_e} b_{q_4, \nu_\mu} \quad (1.17)$$

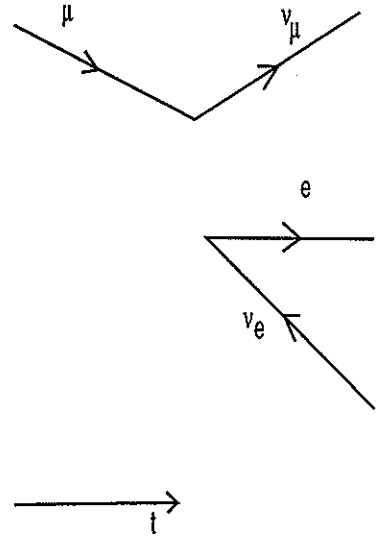
et nous limitant au 1<sup>er</sup> ordre en G, nous observons immédiatement :

- que le dénominateur de (1.13) se réduit à l'identité
- que seuls persistent au numérateur les termes où un opérateur  $b(b^+, d^+)$  du développement de  $\mathcal{H}$  selon (1.4) agit sur l'opérateur correspondant dans (1.17), en accord avec (1.7).

Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \int d^4x \langle 0 | b_{q_2, e} d_{q_3, \nu_e} b_{q_4, \nu_\mu} \\ &\quad \left( 1 - i \frac{4G}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e(x) \alpha_i \psi_{\nu_e}(x) \bar{\psi}_{\nu_\mu}(x) \alpha_j \psi_\mu(x) C_{ij} \right) b_{q_1, \mu}^+ |0\rangle \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2}} (-i) C_{ij} \int \frac{d^4x e^{i(q_2+q_4+q_3-q_1)x}}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} \bar{u}_e(q_2) \alpha_i v_{\nu_e}(q_3) \bar{u}_{\nu_\mu}(q_4) \alpha_j u_\mu(q_1) \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2}} (-i) \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q_2 + q_3 + q_4 - q_1) \bar{u}_e \alpha_i v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \alpha_j u_\mu C_{ij}}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Graphiquement, il est commode de représenter le processus en termes du diagramme ci-contre: où le  $\nu_e$  se propageant à l'envers dans le temps représente l'évolution conventionnelle du  $\bar{\nu}_e$  (cette notation permet de n'utiliser qu'un type de ligne pour particule et antiparticule, et de suivre facilement le cheminement des nombres quantiques, par ex. le nombre électronique). Notons qu'il est en fait possible d'écrire directement le résultat (1.18) à partir de règles simples associant les spineurs  $\bar{u}, \bar{v}$  aux lignes sortantes et  $u, v$  aux lignes entrantes, le point central étant représentatif de l'interaction. Au vu de (1.18), il est commode d'introduire l'opérateur de transition  $T_{fi}$ . Afin de rendre  $T_{fi}$  invariant de Lorentz (ce qui simplifie singulièrement son évaluation, puisque l'on peut alors choisir un référentiel arbitraire), nous écrirons, pour un nombre quelconque de particules initiales ou finales :





$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \frac{\delta^4(\sum q_f - \sum q_i)}{\prod(\sqrt{2\omega_i}(2\pi)^{3/2}) \prod(\sqrt{2\omega_f}(2\pi)^{3/2})} T_{fi} \quad (1.19)$$

### 1.5. TAUX DE DÉSINTÉGRATION ET SECTION EFFICACE

Le taux de désintégration se calcule à partir (1.19) de la façon standard.

Si l'on revient à un volume et un temps fini  $V, T$ , et que l'on réexprime  $(2\pi)^4 \delta^4$  dans (1.18), on obtient, en prenant formellement le carré de  $S_{fi}$  pour exprimer la probabilité de transition : (pour  $f \neq i$ )

$$|S_{fi}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q_4 + q_3 + q_2 - q_1) VT}{[(2\pi)^3]^4 \prod(2\omega_i) \prod(2\omega_f)} |T_{fi}|^2 \quad (1.20)$$

La particule initiale étant normée à  $\frac{V}{(2\pi)^3}$ , pour obtenir la probabilité de transition par unité de temps, et par particule, nous divisons par  $\frac{VT}{(2\pi)^3}$ . Nous sommes enfin sur les densités d'état final :  $d^3q_2 d^3q_3 d^3q_4$  dans cette normalisation, pour obtenir:

$$d\Gamma(\mu \rightarrow e\nu_\mu \bar{\nu}_e) = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(q_4 + q_3 + q_2 - q_1)}{2\omega_1} |T_{fi}|^2 \prod_f \left[ \frac{d^3q_f}{(2\pi)^3 2\omega_f} \right] \quad (1.21)$$

où  $f = 2, 3, 4$

L'expression se généralise aisément (un facteur statistique s'introduit en cas de particules identiques dans l'état final).

De même, la section efficace d'une réaction, traduisant la probabilité de la transition  $1 + 2 \rightarrow a + b + \dots$  s'écrit, en tenant compte des vitesses  $v_1$  et  $v_2$  qui déterminent le flux incident :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(\sum q_f - \sum q_i)}{2\omega_1 2\omega_2 |v_1 - v_2|} |T_{fi}|^2 \prod_f \left[ \frac{d^3q_f}{(2\pi)^3 2\omega_f} \right] \quad (1.22)$$

Remarquons toutefois que (1.22) n'est strictement correcte que dans le cas où  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$  (ou si l'une des deux vitesses s'annule). C'est le cas usuellement rencontré: système "du laboratoire" avec cible au repos, ou système du "centre de masse". Dans le cas général, il faut substituer à  $|v_1 - v_2|$  l'expression

$$j = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \sqrt{(q_1 q_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (1.23)$$

avec laquelle elle coïncide dans les cas particuliers envisagés, et qui garantit l'invariance de la section efficace totale sous les transformations de Lorentz.

Dans (1.21) comme dans (1.22), nous avons supposé implicitement le spin des particules initiales et finales connu (il est contenu dans les indices  $i$  et  $f$ ). Si le spin final n'est pas observé, il y a lieu de sommer sur tous les états possibles. Si les particules initiales ne sont pas polarisées, on prendra la moyenne sur les différentes configurations.

### 1.6. MODÈLE DE FERMI ET DIFFUSION $\nu_\mu - e$

Nous ne poursuivrons pas ici le calcul de la désintégration du  $\mu$ , en raison du caractère quelque peu technique de l'intégration sur l'espace des phases final [dans le cas particulier  $\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi$   $\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi$ , on trouvera le détail du calcul, par exemple dans : Landau et Lifschiz, théorie quantique relativiste, tome 2, p.243; le résultat,  $\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$  conduit à une mesure directe de  $G$ ; en outre la distribution énergétique des électrons permet d'éliminer d'autres formes de couplage].

Nous nous intéressons maintenant au cas de la diffusion de neutrinos,  $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ . Considérant l'amplitude  $\langle \mu^-(p_2)\nu_e(q_2)\nu_\mu(q_1)e(p_1) \rangle$ , nous sommes amenés, comme précédemment, à évaluer l'élément de matrice :

$$T_{fi} = \frac{4G}{\sqrt{2}} \bar{u}_\mu \alpha_i u_{\nu\mu} \bar{u}_{\nu e} \alpha_j u_e C_{ij} \quad (1.24)$$

Pour déterminer expérimentalement les coefficients  $C_{ij}$ , il faudrait envisager toutes les combinaisons de  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  autorisées par l'invariance de Lorentz. On trouvera les détails de cette évaluation, par exemple dans C. Quigg, p.90.

Si l'on suppose, comme dans le cas de l'électromagnétisme, que le couplage est vectoriel, on est tenté de réduire les  $\alpha_i$  à  $\{\gamma_\mu\}$ . Toutefois, on se souvient de l'hypothèse que seuls existent les neutrinos polarisés à gauche. Dans ce cas, on a, utilisant l'opérateur de projection

$$\frac{1-\gamma_5}{2} u_\nu = u_\nu \quad (1.25)$$

pour tout neutrino.

Libre à nous de ne tenir compte de ce facteur que lors de la somme sur les spins, ou de l'inclure explicitement dans l'interaction (nous verrons plus loin, lors de l'étude des modèles unifiés, que ce dernier choix est seul correct).

Nous élevons donc (1.24) au carré, et sommions sur les spins dans l'état final. Nous prenons la moyenne sur le spin de l'électron dans l'état initial; une telle moyenne ne se justifie toutefois pas pour le faisceau de neutrinos, que l'on suppose entièrement polarisé à gauche. [Nous nous limitons encore à  $\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi$   $\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi$  avec des coefficients  $C$

pris égaux à 1.]

$$X \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |T_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{16G^2}{2} X_1^{\sigma\rho} X_{2\sigma\rho} \quad (1.26)$$

où

$$X_1^{\sigma\rho} = \sum_{\text{spins}} \bar{u}_{\nu\mu}^i \left( \gamma^\sigma \frac{1-\gamma_5}{2} \right)_{ij} u_\mu^j \bar{u}_\mu^k \left( \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2} \right)_{kl} u_{\nu\mu}^l \quad (1.27)$$

et  $X_2$  est l'expression similaire où  $e$  remplace  $\mu$ .

Nous savons que, pour une particule de masse  $m$  et d'impulsion  $p$

$$\sum_{\text{spins}} u^i \bar{u}^k = (p + m)^{ik} \quad (1.28)$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} X_1^{\sigma\rho} &= Tr \quad \gamma^\sigma \frac{1-\gamma_5}{2} (p_2 + m_\mu) \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2} \not{p}_1 \\ X_2^{\sigma\rho} &= Tr \quad \gamma^\sigma \frac{1-\gamma_5}{2} (p_1 + m_e) \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2} \not{p}_2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

En commutant les opérateurs  $(1-\gamma_5)/2$ , on voit que les contributions proportionnelles aux masses s'annulent,

$$\begin{aligned} X_1^{\sigma\rho} &= Tr \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_1 \\ &= 2(q_1^\rho p_2^\sigma - q_1 p_2 g^{\rho\sigma} + q_1^\sigma p_2^\rho) - 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_{1\mu} p_{2\nu} \\ X_{2\sigma\rho} &= 2(q_{2\rho} p_{1\sigma} - q_2 p_1 g_{\rho\sigma} + q_{2\sigma} p_{1\rho}) - 2i\varepsilon_{\alpha\sigma\beta\rho} q_2^\alpha p_1^\beta \end{aligned} \quad (1.30)$$

$X_1$  et  $X_2$  sont donc chacun la somme d'un terme symétrique et d'un terme anti-symétrique. Dans l'évaluation de  $X$ , les termes croisés s'éliminent lorsque l'on tient compte de la conservation de l'impulsion, concrétisée dans l'expression de la section efficace par  $\delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)$ ; utilisant l'identité :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = -2(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \quad (1.31)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} X &= 16G^2 \{ 2(p_1 q_1 \cdot p_2 q_2 + p_1 p_2 \cdot q_1 q_2) + 2(p_1 q_1 \cdot p_2 q_2 - p_1 p_2 \cdot q_1 q_2) \} \\ &= 64G^2 (p_1 q_1) (p_2 q_2) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Il vient donc, pour la section efficace ((1.22) et (1.23))

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{4|p_1 q_1|} \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2\omega_{\nu_e}} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\omega_\mu} X \quad (1.33)$$

Il est utile de donner l'expression de certains invariants en fonction des variables dans

le système du labo. Soient

$$\begin{aligned} E, & \quad \text{l'énergie du } \nu_\mu \text{ incident} \\ E' \equiv yE & \quad \text{l'énergie du } \mu \text{ sortant} \end{aligned} \quad (1.34)$$

On a donc, pour un électron - cible ou repos :

$$\begin{aligned} p_1 q_1 &= m_e E \\ p_2 q_2 &= m_e E - \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2} \\ p_1 p_2 &= m_e E' = m_e \cdot E \cdot y \\ p_1 q_2 &= m_e (E + m_e - E') \end{aligned} \quad (1.35)$$

... mais il est toutefois plus commode de calculer dans le centre de masse; on a :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{q}_1 &= \vec{p}_2 + \vec{q}_2 = 0 \\ \omega_\mu &= \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_\mu^2} \quad \omega_{\nu_e} = |\vec{p}_2| \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'intégration sur  $\vec{q}_2$  nous ramène à  $\delta(p_1^0 + q_1^0 - p_2^0 - q_2^0)$   $X$  ne dépendant pas de l'angle azimutal  $\varphi$ , nous réduisons  $d^3 p_2$  à  $|\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \cdot d \cos \theta^*$  où  $\theta^*$  est l'angle entre le faisceau initial et le muon sortant dans le centre de masse. Il vient donc :

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{X}{4p_1 q_1} \frac{\delta(\omega_{\nu_\mu} + \omega_e - \omega_{\nu_e} - \omega_\mu)}{2\omega_{\nu_e} 2\omega_\mu} |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| d \cos \theta^* \quad (1.37)$$

On effectue l'intégration sur  $|\vec{p}_2|$ ; comme  $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial |\vec{p}_2|} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_\mu} 2|\vec{p}_2|$ , il vient :

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{X}{16p_1 q_1} \left| \frac{\vec{p}_2}{\omega_\mu + \omega_{\nu_e}} \right| d \cos \theta^* \quad (1.38)$$

Il s'avère utile de réexprimer l'intégration sur  $\cos \theta^*$  dans le système du centre de masse en termes des variables observées dans le système de labo; dans la limite où les masses sont négligeables devant E, on a, dans le labo :

$$\frac{p_1 q_2}{p_1 q_1} \simeq 1 - y \quad (1.39)$$

et, dans le CM

$$\frac{p_1 q_2}{p_1 q_1} = \frac{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2| (1 - \cos \theta^*)}{2|\vec{p}_1|^2} \quad (1.40)$$

d'où :

$$(1 - \cos \theta^*) = 2(1 - y) \quad (1.41)$$

et, dans cette limite,  $y$  varie de 0 à 1.

Nous avons donc finalement, en négligeant les masses

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{2\pi} \frac{X}{4m_e E} \quad (1.42)$$

Dans le cas de  $\nu_\mu + e \rightarrow \mu + \nu_e$ ,  $X$  ne dépend pas de  $y$ ; l'intégration est donc triviale, et l'on trouve :

$$\sigma = \frac{4}{2\pi} G^2 m_e E \quad (1.43)$$

### 1.7. FORME V-A DU COURANT ET HÉLICITÉ

Parmi tous les opérateurs autorisés en (1.16), les couplages vectoriels et axiaux occupent une place privilégiée, car ils maintiennent l'hélicité des particules.

Adoptons la notation :

$$(1 - \gamma_5)/2 = L \quad (1 + \gamma_5)/2 = R \quad (1.44)$$

pour les opérateurs de projection sur l'hélicité gauche (resp. droite) des fermions.

On se souviendra que  $LR = RL = 0$ ;  $R^2 = R$ ,  $L^2 = L$ ,  $L + R = 1$ .

On les représente graphiquement en utilisant une flèche double pour le spin, aligné sur la direction de propagation pour  $R$ , à l'opposé de celle-ci pour  $L$ .

On vérifie qu'un terme de masse sur  $\bar{\psi}\psi$  correspond à une "interaction" qui renverse l'hélicité :

$$m\bar{\psi}\psi = m[(\bar{\psi}_L)\psi_R + (\bar{\psi}_R)\psi_L] \quad (1.45)$$

De même,  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$  implique un renversement de chiralité.

Seuls les couplages vectoriels et axiovectoriels  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$  maintiennent l'hélicité :

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(\gamma_5)\psi = (\bar{\psi}_L)\gamma^\mu(\gamma_5)\psi_L + (\bar{\psi}_R)\gamma^\mu(\gamma_5)\psi_R \quad (1.46)$$

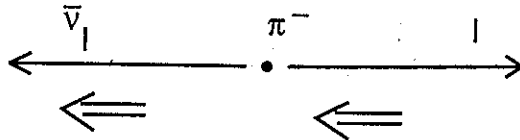
Il en résulte, pour le courant chargé, que l'hypothèse d'un neutrino à deux composantes  $\psi_\nu = L\psi_\nu$  impose que seul le lepton chargé gauche participe à l'interaction.

Il est alors facile de rendre compte (exercice !) de la violation de la parité dans les désintégrations du  $Co^{60}$  et du  $\mu$  (dans ce dernier cas, se placer dans le système de  $\mu$  au repos, spin selon  $Z$ ; considérer la situation où les neutrinos s'échappent dans la direction  $Z$ , à l'opposé de l'électron, c'est-à-dire le maximum possible d'énergie pour l'électron).

On est ainsi amené à introduire un courant chargé faible,  $j_\ell^{\mu-} = \bar{\psi}_\ell \gamma^\mu L \psi_{\nu_\ell}$  pour chaque lepton. Noter que le choix de  $\gamma^\mu$  ou  $\gamma^\mu \gamma_5$  est ici sans conséquence, l'opérateur  $L$  identifiant, à une constante multiplicative près, ces deux types de courants.

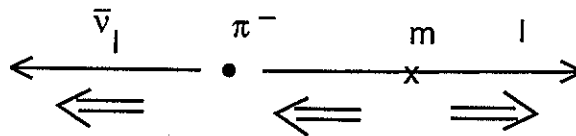
Si l'on considère des particules d'impulsion élevée par rapport à leur masse, il est utile de considérer un développement de perturbations en termes de particules d'hélicité définie, interagissant par l'intermédiaire du terme de masse.

Par exemple, un  $\pi^-$  (de spin 0) se désintègre en  $\ell$  et  $\bar{\nu}_\ell$



L'antineutrino (à l'opposé du  $\nu$ ) est polarisé à droite; le lepton à gauche en vertu du couplage évoqué  $\bar{\psi}_\ell \gamma_\mu L \psi_{\nu_\ell}$ ; il en résulte que la désintégration est impossible à l'ordre 0 en  $m$ .

A l'ordre suivant,



l'interaction est possible, mais avec un élément de matrice proportionnel à la masse. Il en résulte que, contrairement à l'attente basée sur l'espace des phases,

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\bar{\nu})}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\bar{\nu})} \simeq 1.2 \cdot 10^{-4} \quad (1.47)$$

### Exercice

Calculer ce rapport en supposant un Lagrangien de la forme :

$$\mathcal{L}_{int} = C \cdot j_{had}^\mu j_{lept}^\mu \quad (1.48)$$

où

$$j_{lept}^\mu = \bar{\psi}_\ell \gamma^\mu L \psi_{\nu_\ell} \quad (1.49)$$

On utilisera, en vertu de l'invariance de Lorentz :

$$\langle 0 | j_{had}^\mu | \pi^-(p) \rangle = \sqrt{2} f_\pi p^\mu \quad (1.50)$$

où  $f_\pi$  est une constante.

Enfin, dans le cas du courant neutre, par exemple dans la diffusion  $\nu_\mu e$ , on pourra en général ajouter un terme au modèle de Fermi initial :

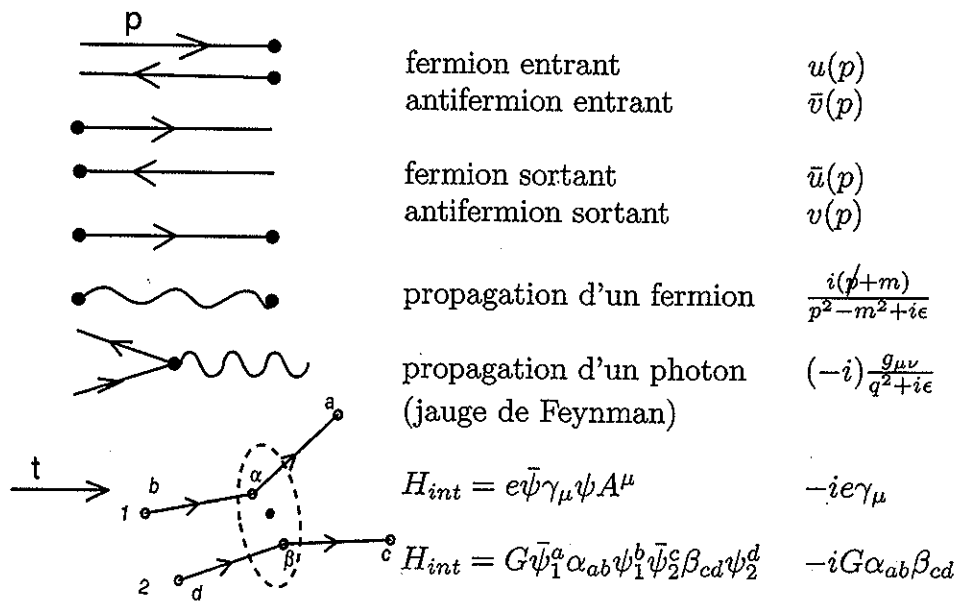
$$\mathcal{L}_{int} = C \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu L \psi_{\nu_\mu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu (\alpha L + \beta R) \psi_e \quad (1.51)$$

### Exercice

Calculer les sections efficaces  $\nu_\mu e$  et  $\bar{\nu}_\mu e$  en fonction du Lagrangien (1.51).

#### 1.8. ORDRES SUPÉRIEURS - RÈGLES DE FEYNMAN

Il est instructif de considérer l'évaluation des ordres supérieurs du calcul des perturbations. Par exemple, on traitera à titre d'exercice l'ordre  $G^2$  de la diffusion  $\nu_\mu e$ . On vérifiera aisément que le calcul de l'amplitude se ramène à l'évaluation de tous les diagrammes distincts tracés selon les règles suivantes :



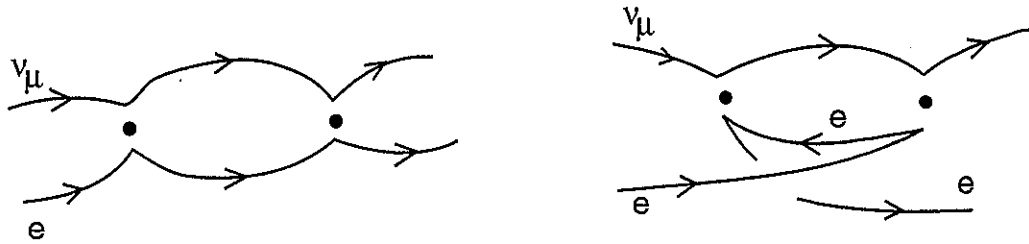
à chaque sommet (vertex) : conservation de la 4-impulsion.

On intègre sur toutes les impulsions  $k$  non fixées :  $\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

une boucle fermée de fermions donne lieu à un signe relatif  $(-)$ , tout comme la permutation des lignes fermioniques identiques

(pour une démonstration générale, voir p.ex., V. Berestetski, E. Lifchitz, L. Pitayevski, Théorie Quantique Relativiste, Ed. Mir. - Tome 4 du Cours de Landau et Lifchitz).

On constate que pour  $\nu_\mu e$ , les deux graphes



comportent une intégrale quadratiquement divergente, se comportant, pour  $k \gg$  toutes les variables du problème, comme

$$G^2 \int \frac{d^4 k}{k^2}$$

on ne peut y donner un sens que par l'introduction d'une procédure de troncation appropriée. Par exemple, en bornant l'intégration à  $|k| = \Lambda$ , on obtient un terme du type  $G^2 \Lambda^2$ .

Il est possible, en principe, de rendre un sens au calcul, en modifiant, à l'ordre  $G^2$  le Lagrangien. Dans le cas présent, il faudrait prétendre s'être trompé sur la forme initiale de ce Lagrangien, et remplacer par exemple  $G \bar{\psi} O_i \psi \bar{\psi} O_j \psi$  par

$$(G - \kappa G^2 \Lambda^2) \bar{\psi} O_i \psi \bar{\psi} O_j \psi$$

ce qui permettrait en fixant  $\kappa$  d'éliminer les divergences à l'ordre considéré [des modifications similaires des termes cinétiques  $m^2 \bar{\psi} \psi, \bar{\psi} \not{p} \psi$  sont aussi nécessaires].

Un tel programme peut être mené à bien dans le cas de l'électrodynamique - où les corrections d'ordre supérieur sont absorbées dans la définition de champs et de la constante de couplage renormalisés. A part les masses, seule la charge électrique doit être ajustée à sa valeur expérimentale. Dans le cas présent toutefois, ce programme est voué à l'échec. Il est facile de voir en effet que chaque ordre du calcul des perturbations amène de nouveaux termes divergents (par exemple, des graphes d'ordre 3 et 4 en  $G^2$  sont divergents et induisent des termes à 6 et 8 fermions). De proche en proche, on devrait ainsi introduire un nombre infini de termes dans le Lagrangien, et ajuster un nombre infini de constantes, ce qui enlève tout caractère prédictif à la théorie.

C'est pourquoi bien que les calculs au premier ordre du modèle de Fermi aient donné jusqu'à la fin des années 70 une description satisfaisante de l'expérience, il a fallu très tôt, pour des raisons de consistance de la théorie, chercher une formulation différente. Sur le modèle de l'électrodynamique quantique, c'est très naturellement que l'on s'est tourné vers des théories de jauge.



## 2. Théorie de jauge des interactions électromagnétiques et faibles

### 2.1. TRANSFORMATIONS DE JAUGE DE 1ÈRE ET DE 2ÈME ESPÈCE-RAPPELS-

Il est bien connu que l'extension aux transformations locales des propriétés d'invariance globale du Lagrangien des fermions libres conduit, de façon élégante, à l'introduction des forces électromagnétiques. Nous rappelons brièvement l'argument.

Soit le Lagrangien d'un électron libre :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Il est clairement invariant sous la transformation :

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi; \quad \alpha = Cte \quad (2.1)$$

Par le théorème de Noether, on exploite d'ailleurs cette invariance pour établir la conservation du courant "électrique"  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  (alors que l'électromagnétisme n'est pas encore introduit !)

Si l'on impose maintenant l'invariance locale, pour  $\alpha = \alpha(x)$ . ( $e$  est une constante introduite arbitrairement)

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi' \quad (2.2)$$

on voit que le terme dérivé est d'abord modifié :

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i[\bar{\psi}'\not{\partial}\psi' + i\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'e\partial^\mu\alpha] \quad (2.3)$$

On rétablit l'invariance en introduisant le champ  $A^\mu$ , en écrivant :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\partial_\mu + ieA_\mu)\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.4)$$

et en exigeant que  $A^\mu$  se transforme selon :

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\alpha \quad (2.5)$$

Enfin, on vérifie que le terme

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.6)$$

est manifestement invariant sous les transformations définies par (2.2) et (2.5).

On peut donc ajouter sans briser l'invariance de jauge un terme cinétique (sans ce dernier, le champ  $A^\mu$  pourrait être éliminé, conduisant à un modèle de Fermi).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

où le facteur  $-1/4$  est choisi en accord avec les normalisations habituelles.

*Il faut en outre remarquer que le choix de  $e$  dans (2.2) et (2.4) est arbitraire; pour un autre fermion, on est en principe en droit de considérer une constante (charge) différente. L'invariance de jauge sous le groupe "Abélien" (2.2) ne fixe en rien la valeur de la charge électrique. En d'autres termes, rien n'explique pourquoi  $e, \mu$  et proton ont des charges égales en valeur absolue.*

## 2.2. GROUPES DE SYMÉTRIE NON ABÉLIENS

Nous voulons étendre la construction ci-dessus au cas des interactions faibles. Nous avons vu déjà qu'il fallait introduire le courant chargé :

$$j_\mu^+ = \bar{\psi}_e \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_{\nu_e} \quad (2.8)$$

Il faut donc faire intervenir des transformations qui impliquent à la fois  $e$  et  $\nu_e$ . Si nous omettons temporairement les termes de masse, le Lagrangien cinétique s'écrit :

$$\mathcal{L} = \bar{e}_L i \not{\partial} e_L + \bar{e}_R i \not{\partial} e_R + \bar{\nu}_L i \not{\partial} \nu_L \quad (2.9)$$

où, pour simplifier la notation, nous avons remplacé  $\psi_e$  par  $e$ , et  $\psi_{\nu_e}$  par  $\nu$ . Les indices  $L$  et  $R$  représentent comme précédemment les projecteurs  $(1 \mp \gamma_5)/2$ .

Le Lagrangien (2.9) étant invariant sous les rotations entre  $\nu_L$  et  $e_L$ , il est normal d'introduire la notation  $\Psi_L$

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

on parle souvent de "superspineur", chacune des composantes de  $\psi$  étant en effet un spineur de Dirac (ou de Weyl).

Formellement,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L i \not{\partial} \Psi_L + \bar{e}_R i \not{\partial} e_R \quad (2.11)$$

où l'opérateur  $i \not{\partial}$  agit diagonalement sur les 2 composantes de  $\Psi$ ; on pourrait plus correctement écrire  $i \not{\partial} \otimes 1$ , où 1 est la matrice identité à 2 dimensions, ou encore de

façon complètement explicite, sauf pour les indices de Dirac

$$\sum_{jk} \bar{\psi}_{Lj} i \not{\partial} \psi_{Lk} \delta_{jk}$$

Nous considérons maintenant des transformations globales paramétrisées à l'aide d'une matrice  $\alpha$  :

$$\Psi' \equiv G\Psi = e^{ig\alpha}\Psi; \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \alpha = 0 \quad (2.12)$$

On garde l'invariance si :

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}G^+ = \bar{\Psi}G^{-1}; \quad G^+G = 1 \quad (2.13)$$

Ce qui se traduit encore, pour la matrice  $\alpha$  par :

$$\alpha^+ = \alpha \quad (2.14)$$

(il suffit de vérifier le premier ordre)

Les transformations (2.13) incluent encore la possibilité d'une phase globale, commune à  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  comme celle que nous avons étudiée en (2.2). Nous souhaitons traiter cette possibilité séparément et demandons donc que le déterminant de  $G$  soit égal à 1 (transformation *unimodulaire*).

On vérifie aisément que :

$$\det G = 1 \rightarrow \text{Tr } \alpha = 0 \quad (2.15)$$

Dans le cas présent ( $\psi$  se comporte pour (2.12) comme un spineur à 2 composantes), on est ainsi passé du groupe  $U(2)$  des transformations unitaires dans un espace à deux dimensions complexes (2.13) au groupe des transformations "spéciales" : unitaires unimodulaires  $SU(2)$ .

L'essentiel des considérations ci-dessous reste vrai si  $\Psi$  compte  $N$  composantes (groupe  $SU(N)$ ).

Selon (2.15), on décompose la matrice  $\alpha$  selon une base des matrices hermitiennes de trace nulle. Une telle base est donnée par les matrices de Pauli :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \sum \alpha_i \frac{\tau_i}{2} \quad (2.16)$$

où le choix de  $\tau_i/2$  plutôt que  $\tau_i$  résulte d'un choix conventionnel de normalisation:

$$\text{Tr } \tau^i \tau^j = 2\delta^{ij} \quad (2.17)$$

Nous verrons plus loin (le lecteur le sait déjà, pour le cas similaire de l'algèbre de Dirac) que le groupe  $SU(2)$  (ou  $SU(N)$ ) possède d'autres représentations que la représentation de définition considérée en (2.16).

Il est donc commode de généraliser cette relation en termes de générateurs "génériques"  $T^i$  (qui seront représentés dans chaque cas particulier par une matrice de dimension appropriée),

$$\alpha = \sum \alpha_i T^i \quad (2.18)$$

On peut alors dériver les propriétés de commutation de ces  $T^i$ .

Considérons par exemple le produit :

$$G_\alpha G_\beta G_\alpha^{-1} G_\beta^{-1} = G_\gamma \quad (2.19)$$

où  $G_\alpha$  et  $G_\beta$  étant deux éléments du groupe,  $G_\gamma$  doit nécessairement appartenir au groupe.

En développant (2.19) au second ordre en  $\alpha, \beta$ , avec des développements du type (2.18), on trouve :

$$-\alpha_i \beta_j [T^i T^j] = i \gamma_k T^k \quad (2.20)$$

Les  $T^k$  forment une base de la représentation, on peut donc écrire :

$$[T^i T^j] = i f^{ij}_k T^k \quad (2.21)$$

où les coefficients  $f$  sont manifestement antisymétriques dans leurs deux premiers indices.

Si l'on adopte en outre une normalisation de type :

$$\text{Tr } T^a T^b = \frac{1}{K_R} \delta^{ab} \quad (2.22)$$

pour la représentation  $R$  considérée, on peut extraire les  $f_{ijk}$  de (2.21) :

$$f_{ijk} = -K i \text{Tr } T_k [T_i T_j] \quad (2.23)$$

et de l'invariance cyclique de la trace résulte l'antisymétrie complète des  $f_{ijk}$ .

Notons que si la structure des  $f_{ijk}$  est une caractéristique de la "géométrie" du groupe, comme le montre (2.20), leur normalisation dépend manifestement de celle des  $T^i$  pour chaque représentation [c'est le produit  $\alpha_i T^i$  qui possède un sens géométrique]. Il est commode de choisir  $K_R$  dans (2.22) pour assurer que les  $f_{ijk}$  apparaissant dans (2.21) soient identiques pour toutes les représentations.

Dans le cas de  $SU(2)$ , le choix (2.16) conduit bien sûr à identifier les *coefficients de structure*  $f_{ijk}$  au tenseur complètement antisymétrique  $\epsilon_{ijk}$ .

Notons toutefois que le choix fréquent de la base (non hermitienne)  $\tau^\pm = (\tau_1 \pm i\tau_2)/\sqrt{2}$ ,  $\tau_3$  (base du type de Cartan) ne satisfait pas à (2.22).

Avant d'appliquer ces notions élémentaires, il est encore utile d'introduire la représentation adjointe du groupe.

On peut en effet, à partir de la représentation de définition construire des tenseurs, c'est-à-dire des objets qui se transforment comme les produits :

$$T^{ijk}_{lmn} \langle \rangle \Psi^i \Psi^j \Psi^k \dots (\Psi^l)^+ (\Psi^m)^+ (\Psi^n)^+ \quad (2.24)$$

En général, ces tenseurs conduisent à des représentations réductibles, c'est-à-dire que l'on peut construire des combinaisons linéaires des  $T^{ijk}_{lmn}$ , qui se transforment entre elles sous toutes les opérations du groupe.

A titre d'exemple, si  $\Psi$  et  $\chi$  se transforment sous (2.12), il est facile de vérifier que, dans le cas de  $SU(N)$

$$(\chi^+)_i \Psi^i \text{ est invariant} \quad (2.25)$$

En outre, les  $N^2 - 1$  objets

$$V_a = \chi^+ T_a \Psi \quad (2.26)$$

se transforment, pour  $\alpha$  infinitésimal, comme :

$$\begin{aligned} V'_a &= (\chi^+ T_a \Psi)' = \chi^+ T_a \Psi + i\alpha^b \chi^+ [T_a T_b] \Psi \\ &= V_a + i\alpha_b i f_{ab}{}^c V_c \end{aligned} \quad (2.27)$$

On a donc construit une nouvelle représentation du groupe, dont les générateurs sont

$$(T^a)_{xy} = i f_{xay} \quad (2.28)$$

c'est la représentation adjointe. On vérifie, à l'aide de l'identité de Jacobi (triviale pour les représentations matricielles) :

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \quad (2.29)$$

que ces générateurs satisfont bien aux relations de commutation (2.21).

Il est évident, par sa définition même, que la représentation adjointe et sa conjuguée hermitienne sont équivalentes pour les transformations du groupe.

La construction (2.26) peut en outre se faire à partir de toute représentation de  $SU(N)$ .

Enfin, le "produit scalaire"  $\sum_a V_a \cdot W_a$  où  $V_a$  et  $W_a$  sont construits selon (2.26) est invariant sous le groupe.

### 2.3. TRANSFORMATION NON ABÉLIENNE LOCALE

Nous considérons maintenant (2.12) avec  $\alpha = \alpha(x)$ . Selon l'exemple de la section 2.1, l'invariance du Lagrangien n'est maintenue qu'au prix de l'introduction d'une dérivée covariante  $D_\mu$ , qui y remplacera  $\partial_\mu$  :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \underline{W}_\mu \quad (2.30)$$

où  $W_\mu$  est, cette fois, une matrice  $2 \times 2$ , agissant sur le superspineur  $\Psi$ .

On trouve :

$$W'^\mu = G W^\mu G^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu G) G^{-1} \quad (2.31)$$

ou, particularisant à  $\alpha$  infinitésimal,

$$\begin{aligned} G &= 1 + ig\alpha^i \frac{\tau_i}{2} \\ W'^\mu &= W^\mu + ig\alpha^i \left[ \frac{\tau_i}{2}, W^\mu \right] - \frac{\tau_i}{2} \partial^\mu \alpha^i \end{aligned} \quad (2.32)$$

On peut décomposer  $W^\mu$  à son tour en termes des générateurs  $T_i$  (ici  $\tau_i/2$ ) :

$$W^\mu = \sum W^{\mu i} \tau_i / 2 \quad (2.33)$$

Il suffit alors de multiplier (2.33) par  $\tau_j$  et de prendre la trace pour l'obtenir :

$$W'^\mu_j = W^\mu_j - g\alpha^i \epsilon_{jik} W^\mu_k - \partial^\mu \alpha_j \quad (2.34)$$

On voit donc que l'on a introduit 3 champs vectoriels (dits "champs de jauge")  $W_i^\mu$  ( $N^2 - 1$  champs dans le cas de  $SU(N)$ ).

Leur loi de transformation comporte 2 termes. Le terme  $\partial^\mu \alpha$ , que nous attendions depuis notre expérience avec l'électromagnétisme, et un terme en  $\alpha^i$ .

En particulier, on constate que la transformation de  $W$  est non triviale, même pour  $\partial^\mu \alpha = 0$ . Dans ce cas, en effet,

$$\begin{aligned}\partial^\mu \alpha &= 0 \\ W_j'^\mu &= W_j^\mu + ig\alpha^i (T^i)_{jk} W_k^\mu\end{aligned}\quad (2.35)$$

avec  $(T^i)_{jk} = if_{jik}$  où l'on reconnaît la représentation adjointe de  $SU(N)$  et ce, bien que l'on n'ait dû introduire  $W$  que pour garantir l'invariance sous les transformations locales.

En effet,  $\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi$  introduit un terme :

$$W_i^\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\tau^i}{2} \Psi \quad (2.36)$$

et  $\bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\tau^i}{2} \Psi$  se transformant selon la représentation adjointe, il doit en être de même de  $W_i^\mu$ .

La présence du terme (2.35) dans la loi de transformation a des conséquences importantes pour la construction de modèles.

En effet, supposons que nous introduisons un nouveau doublet de fermions,  $\chi$  se transformant sous (2.12), mais avec une constante de couplage  $\tilde{g}$  (comme c'était possible dans le cas de l'électromagnétisme).

Si le même boson de jauge  $W^\mu$  doit rétablir l'invariance locale, on doit avoir  $g \equiv \tilde{g}$ ; en effet la valeur de  $g$  apparaît explicitement dans (2.35).

*Il en résulte que, pour des particules se transformant sous un groupe non abélien, les rapports des charges sont fixés.*

Par exemple, la charge faible  $g$  qui apparaît dans la dérivée covariante est la même qu'elle soit appliquée à l'électron, au muon, au  $W^\mu$  lui-même.

Enfin, il nous reste à préciser le terme décrivant l'énergie cinétique. Dans le cas du photon, on connaît la réponse :

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.38)$$

Cette forme se généralise ici, mais l'expression

$$f_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a \quad (2.39)$$

n'est pas elle-même covariante sous les transformations de jauge. On vérifiera que la

généralisation

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.40)$$

conduit au Lagrangien invariant souhaité.

#### 2.4. LE MODÈLE DE GLASHOW-WEINBERG-SALAM

Si l'espoir ultime est d'unifier en un seul groupe non abélien toutes les interactions et particules connues de façon à n'avoir plus qu'une charge fondamentale, les ambitions du "modèle standard" que nous décrivons ci-dessous s'avèrent bien plus réduites. On vérifie directement que le groupe  $SU(2)_L$  évoqué dans les sections précédentes ne peut suffire à unifier interactions faibles et électromagnétisme. En particulier, le photon ne peut y être inclu. En effet,  $W_3^\mu$ , qui serait le seul candidat possible pour  $A^\mu$ , n'est pas couplé à  $e_R$ , et interagit également avec  $\nu_L$  et  $e_L$ .

Plutôt que de rechercher une "grande unification" [dont on trouverait un exemple dans l'emploi du groupe  $SU(5)$ ] les auteurs ci-dessus ont recherché une solution minimaliste, se contentant de jauger un groupe  $U(1)$  supplémentaire : si le boson associé à cet  $U(1)$  est noté  $a^\mu$ , le Lagrangien des fermions devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{e}_R i\gamma_\mu \left( \partial^\mu + i\frac{g'y_R}{2} a^\mu \right) e_R \\ & + \bar{\Psi}_L i\gamma_\mu \left( \partial^\mu + ig\frac{\tau}{2} W^\mu + i\frac{g'y_L}{2} a^\mu \right) \Psi_L \end{aligned} \quad (2.41)$$

Les constantes  $g'y_R$  et  $g'y_L$  sont introduites, et restent temporairement arbitraires (comme le sont les charges d'un groupe abélien). On verra que  $y_R \neq y_L$ .

Il faut noter qu'il reste une autre symétrie globale  $U(1)$  - celle qui correspond au nombre leptonique - que l'on n'a délibérément pas transformée en symétrie locale (elle conduirait à un champ vectoriel sans masse  $a'^\mu$  couplé avec  $g''y'_L = g''y'_R$ ).

Nous verrons plus loin comment une combinaison linéaire de  $a^\mu$  et  $W_3^\mu$  produira le photon, fixant par la même occasion les paramètres  $y_L$  et  $y_R$ .

Pour l'instant, les 4 champs vectoriels correspondant à la symétrie  $SU(2)_L \otimes U(1)$  sont sans masse, et la symétrie "de jauge" est exacte; c'est d'ailleurs elle qui garantit la renormalisabilité de la théorie.

Nous allons maintenant voir comment l'on peut introduire une masse pour l'électron, et briser (à l'aide d'autres termes de masse) l'invariance de jauge. Le fait que les termes de brisure se comportent comme des masses garantit qu'ils soient négligeables à haute énergie, et n'affectent pas la convergence des intégrales : c'est la raison fondamentale du succès de l'approche des interactions faibles par une brisure spontanée de la symétrie de jauge.



Pour introduire un terme rappelant

$$m\bar{e}_R e_L + h.c. \quad (2.42)$$

sans briser l'invariance sous  $SU(2)$ , nous définissons le doublet de champs scalaires :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

qui nous permet d'écrire un couplage de Yukawa :

$$\mathcal{L}_{yuk} = -\lambda_e \bar{e}_R \Phi^+ \Psi_L + h.c. \quad (2.44)$$

La partie cinétique du Lagrangien de  $\Phi$  s'écrit à l'aide de la dérivée covariante :

$$\mathcal{L}_{cin\phi} = \left| \left( \partial_\mu + igW_a^\mu \frac{\tau^a}{2} + i\frac{g'y_\phi}{2} a^\mu \right) \Phi \right|^2 \quad (2.45)$$

où  $y_\phi$  est une charge appropriée.

L'invariance sous  $U(1)$  et (2.44) imposent simplement

$$-y_R - y_\phi + y_L = 0 \quad (2.46)$$

Enfin, le potentiel quartique

$$V(\phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2 \quad (2.47)$$

est le plus général que l'on puisse écrire, en respectant l'invariance sous  $SU(2) \otimes U(1)$ , et la renormalisabilité [des termes en  $(\Phi^+ \Phi)^3$  conduiraient à une constante de couplage de dimension  $1/m^2$ , avec tous les problèmes de renormalisation déjà rencontrés dans le cas du modèle de Fermi].

## 2.5. BRISURE SPONTANÉE DE SYMÉTRIE

Pour simplifier la visualisation du problème, nous allons remplacer temporairement (2.47) par une expression similaire ne dépendant que d'un seul champ complexe  $\phi$ ;

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2 \quad (2.48)$$

possède alors une invariance sous la seule transformation

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha}$$

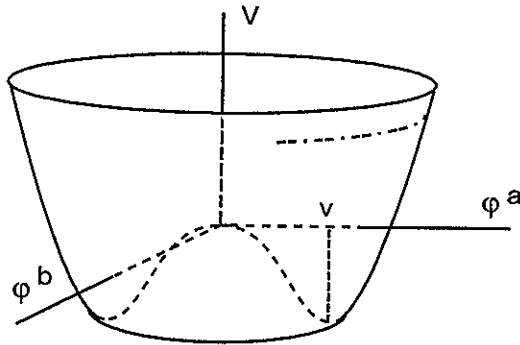
c'est-à-dire les rotations dans le plan complexe.

Si nous cherchons des solutions des équations de mouvement telles que  $\phi(x) = C^{te}$ , nous sommes ramenés à la minimisation de (2.48).

On a nécessairement  $\lambda > 0$  sans quoi  $V$  n'est pas "borné vers le bas". Pour  $\mu^2 = 0$ , le minimum se situe en

$$\phi = \frac{\tilde{\varphi}^a + i\tilde{\varphi}^b}{\sqrt{2}} = 0$$

Toutefois, si nous choisissons (arbitrairement)  $\mu^2 < 0$ , le potentiel prend la forme illustrée ci-contre.



Le minimum se trouve à une valeur finie de  $|\phi|$ , que nous désignons par

$$|\phi| = v/\sqrt{2} \quad (2.49)$$

Un développement en série des perturbations autour de l'origine n'est clairement plus valable, en raison de l'instabilité de ce point. On choisira donc de développer  $\phi$  autour d'un point arbitrairement choisi sur la circonférence (2.49).

Par exemple, posant  $\tilde{\varphi}_a = v + \varphi_a$ ;  $\tilde{\varphi}_b = \varphi_b$ , nous écrivons :

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_a + i\varphi_b) \quad (2.50)$$

Plaçant notre système de coordonnées au nouveau minimum, nous voyons que la dérivée seconde selon  $\varphi_a$  est positive (masse positive de ce champ), tandis que la dérivée selon la direction tangente au cercle est nulle. Nous trouvons donc une particule massive, et une particule de masse nulle. La présence de cette dernière est générale en cas de brisure spontanée de symétrie (théorème de Goldstone). On a choisi arbitrairement une solution asymétrique parmi toutes celles qui sont dégénérées en raison de la symétrie du Lagrangien initial. Cette dégénérescence se traduit naturellement par des dérivées nulles, et donc des particules sans masse.

Revenant au cas plus général d'un doublet de champs scalaires, nous laissons au lecteur de vérifier qu'une situation identique se développe. L'invariance du potentiel sous les 3 rotations de  $SU(2)$  conduit à une particule massive et trois particules de masse nulle (3 bosons de Goldstone). La masse s'exprime simplement en fonction de  $\lambda$  et  $v$ , la position du minimum.

### Exercice

Calculer explicitement la masse du champ  $\eta$  et vérifier que les champs  $\chi$  se trouvent sans masse (ce sont les bosons de Goldstone), pour le doublet :

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_1 + i\chi_2 \\ v + \eta + i\chi_3 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

et le potentiel (2.44) avec  $\mu^2 < 0$ .

## 2.6. EFFETS DE LA BRISURE DE SYMÉTRIE

On peut toujours, après brisure de symétrie, ramener  $\Phi$  à la forme (2.51). Le couplage aux fermions donne alors les termes de masse souhaités, par exemple, de (2.42) on tire, au niveau "classique" (c'est-à-dire, si l'on ne considère que le terme  $v$  dans (2.51)) :

$$\mathcal{L}_{yuk} \rightarrow -\lambda_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_R e_L + hc \quad (2.52)$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda_e = \frac{m_e \sqrt{2}}{v} \quad (2.53)$$

ce qui fixe encore le couplage des électrons au champ scalaire, en particulier pour le champ massif  $\eta$  :

$$\mathcal{L}_{yuk} \rightarrow -\frac{m_e}{v} \bar{e}_R \eta e_L + hc \quad (2.54)$$

Des expressions similaires donnent la masse des divers leptons.

Le couplage entre bosons de jauge et scalaires a des effets plus dramatiques. Nous limitant encore au niveau "classique", nous tirons de (2.45) les termes quadratiques

dans les champs de jauge (c'est-à-dire les contributions à leur masse):

$$\mathcal{L}_{masse W} = \left| \frac{(+i)}{2} \begin{pmatrix} gW_3^\mu + g'y_\phi a^\mu & g(W_1^\mu - iW_2^\mu) \\ g(W_1^\mu + iW_2^\mu) & -gW_3^\mu + g'y_\phi a^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 \quad (2.55)$$

soit encore

$$\mathcal{L}_{masse W} = \frac{v^2 g^2}{8} \left| |W_1^\mu - iW_2^\mu|^2 + |-W_3^\mu + \frac{g'}{g} a^\mu \cdot y_\phi|^2 \right| \quad (2.56)$$

Les champs  $W_1$  et  $W_2$  étant réels, ce terme correspond à la moitié de leur masse; donc :

$$M_{W_{1,2}}^2 = \left( \frac{gv}{2} \right)^2 \quad (2.57)$$

On peut aussi choisir la représentation complexe :

$$W^{\pm\mu} = (W_1^\mu \mp iW_2^\mu)/\sqrt{2} \quad (2.58)$$

auquel cas le terme de masse s'écrit :

$$\left( \frac{gv}{2} \right)^2 W^{+\mu} W_\mu^- \quad (2.59)$$

D'autre part, on s'aperçoit que seule une combinaison linéaire de  $W_3^\mu$  et  $a^\mu$  intervient dans (2.56). La combinaison orthogonale, qui correspond donc à un boson sans masse, sera naturellement identifiée au photon  $A^\mu$ , tandis que nous désignerons par  $Z^\mu$  le boson lourd.

A ce stade, nous choisissons  $y_\phi = 1$  (ce qui revient à une redéfinition éventuelle de  $g'$ ). Posant la transformation orthogonale

$$\begin{aligned} Z^\mu &= W_3^\mu \cos \theta_W - a^\mu \sin \theta_W \\ A^\mu &= W_3^\mu \sin \theta_W + a^\mu \cos \theta_W \end{aligned} \quad (2.60)$$

On voit qu'il faut identifier :

$$g'/g = \tan \theta_W \quad (2.61)$$

pour lire (2.56) sous la forme :

$$\mathcal{L}_{masse W} = \frac{g^2 v^2}{4} \frac{1}{2} \left[ W_1^\mu W_{1\mu} + W_2^\mu W_{2\mu} + \frac{1}{\cos^2 \theta_W} Z^\mu Z_\mu \right] \quad (2.62)$$

et on a donc les relations :

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{gv}{2} \\ M_Z &= M_W / \cos \theta_W \end{aligned} \quad (2.63)$$

A ce stade,  $g, g'/g = tg\theta, y_L, y_R$  sont encore des paramètres libres du modèle. L'identification de  $A^\mu$  au photon va nous permettre d'en fixer 3.

Considérons la dérivée covariante agissant sur les fermions (2.41); on a, réexprimant  $W_3^\mu$  et  $a^\mu$  en termes de  $A^\mu$  à l'aide de (2.60) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A^\mu \text{ leptons}} &= -\bar{e}_L A e_L \left( \frac{-1}{2} g \sin \theta_W + \cos \theta_W g' \frac{y_L}{2} \right) \\ &\quad - \bar{e}_R A e_R \left( g' \cos \theta_W \frac{y_R}{2} \right) \\ &\quad - \bar{\nu}_L A \nu_L \left( \frac{1}{2} g \sin \theta_W + \frac{y_L}{2} g' \cos \theta_W \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Exprimant d'abord l'absence de couplage direct entre  $A^\mu$  et  $\nu$ , on tire de (2.61) et (2.64) :

$$y_L = -1 \quad (2.65)$$

Les interactions électromagnétiques conservant la parité, les couplages de  $e_L$  et  $e_R$  doivent être identiques, d'où :

$$y_R = y_L - 1 = -2 \quad (2.66)$$

Enfin, le couplage doit s'identifier au couplage habituel du photon : ( $|e|$  est la charge du positron)

$$\mathcal{L}_{eA^\mu} = -e \bar{\psi}_e A \psi_e = +|e| \bar{\psi}_e A \psi_e \quad (2.67)$$

donc :

$$g \sin \theta_W = +|e| \quad (2.68)$$

Les seuls paramètres restant à fixer ( $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ ) sont donc  $\sin \theta_W$  et  $M_W$ .

On peut d'ores et déjà écrire les couplages entre leptons et bosons de jauge. Explicitant les dérivées covariantes, on trouve en effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int \text{ jauge}} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + hc) \\ &\quad - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\nu} \gamma^\mu \nu_L Z_\mu \end{aligned}$$

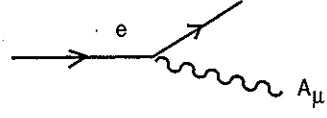
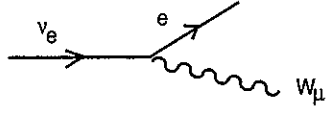
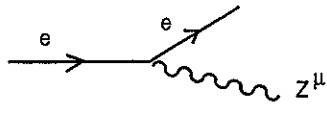
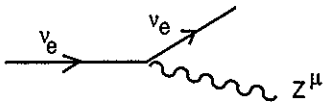
$$-\frac{g}{2 \cos \theta_W} (L_e \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + R_e \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) Z_\mu \quad (2.69)$$

$$+ |e| \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu$$

$$L_e = -1 + 2 \sin^2 \theta_W$$

$$R_e = +2 \sin^2 \theta_W \quad (2.70)$$

ce qui s'exprime encore dans les règles de Feynman :

	$(-i) \cdot (- e ) \cdot \gamma_\mu$
	$(-i) \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}$
	$(-i) \frac{g}{2 \cos \theta_W} (L_e \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} + R_e \gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2})$
	$(-i) \frac{g}{2 \cos \theta_W} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}$

## 2.7. ELIMINATION DES BOSONS DE GOLDSTONE

Avant d'appliquer le modèle ci-dessus au calcul de sections efficaces, ou d'évaluer la masse des bosons intermédiaires  $W$  et  $Z$ , il nous faut encore considérer les bosons de Goldstone  $\chi$  apparaissant dans (2.51). En principe, les effets de telles particules sans masse devraient être sentis à très basses énergies (forces à longue portée). On peut toutefois montrer que, en raison de l'invariance de jauge, de tels effets disparaissent. La façon la plus simple consiste à mettre (2.50) sous la forme :

$$\Phi = e^{i\vec{\zeta} \frac{\vec{\tau}}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

On voit alors qu'une transformation de jauge :

$$\Phi' = e^{-i\vec{\zeta} \frac{\vec{\tau}}{2v}} \Phi \quad (2.72)$$

suffit à éliminer les degrés de liberté  $\zeta$  correspondant aux scalaires de Goldstone.

Cette transformation affecte bien évidemment les champs de jauge, à travers (2.34). Le nombre de degrés de liberté est en fait conservé : on passe de 3 champs de jauge sans masse (2 polarisations transverses) à 3 champs vectoriels massifs (3 degrés de polarisation), en perdant 3 scalaires réels.

La transformation (2.71) s'avère toutefois dangereuse pour la renormalisabilité de la théorie. Il faut noter en effet qu'elle n'est pas linéaire, et implique des puissances arbitraires de  $g$  (on réexprime  $v = 2M_W/g$ ), mélangeant ainsi les ordres du développement en  $g$ .

## 2.8. PROPAGATEUR DU CHAMP VECTORIEL MASSIF

A titre d'exemple, nous traiterons le cas du boson  $Z^\mu$ . Après élimination des bosons de Goldstone, la partie cinétique du Lagrangien se réduit à :

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{1}{4}(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)^2 + \frac{1}{2}M_Z^2 Z^\mu Z_\mu \quad (2.73)$$

Nous calculons le propagateur

$$iD^{\mu\rho}(x) = \langle 0|TZ^\mu(x)Z^\rho(0)|0\rangle$$

comme fonction de Green de l'équation d'onde du  $Z$ .

On extrait les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial Z^\nu}{\partial x^\mu}} = 0 \quad (2.74)$$

qui nous donnent :

$$[\partial^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu]Z_\nu + M_Z^2 Z^\mu = 0 \quad (2.75)$$

On recherche la fonction de Green comme réponse à une source ponctuelle à l'origine. La source est ici vue comme un vecteur-unité orienté dans la direction  $\rho$ , dont on s'intéresse à la composante  $\sigma$ . Il vient :

$$[M_Z^2 g^{\mu\rho} + g^{\mu\rho} \partial^\alpha \partial_\alpha - \partial^\mu \partial^\rho]D^{\rho\sigma}(x) = \delta^4(x)g^{\mu\sigma} \quad (2.76)$$

On prend la transformée de Fourier :

$$D^{\rho\sigma}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} D^{\rho\sigma}(k) \quad (2.77)$$

pour obtenir :

$$[M_Z^2 g^{\mu\rho} - g^{\mu\rho} k^2 + k^\mu k^\rho] D^{\rho\sigma} = g^{\mu\sigma} \quad (2.78)$$

Cherchant  $D^{\rho\sigma}$  sous la forme générale :

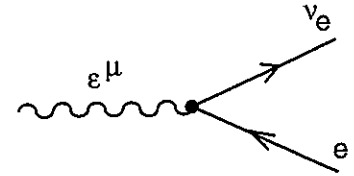
$$D^{\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} A + k^\rho k^\sigma B \quad (2.79)$$

on trouve facilement

$$D^{\rho\sigma} = \frac{-1}{k^2 - M_Z^2} \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{M_Z^2} \right) \quad (2.80)$$

## 2.9. DÉSINTÉGRATION DU $W$ EN LEPTONS

Il suffit d'évaluer le graphe. On se place dans le référentiel de repos du  $W$ . Le vecteur de polarisation  $\epsilon^\mu$  peut alors être choisi arbitrairement selon l'axe  $z$ .



L'élément de matrice est :

$$\mathcal{M} = \frac{g}{\sqrt{2}} \epsilon_\mu \bar{u}^\nu(q) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} v^e(p) \quad (2.81)$$

Sommant sur les spins, et négligeant la masse de l'électron, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{spins} \\ e, \nu}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{2} \text{Tr} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon} \frac{1 - \gamma_5}{2} \not{q} \\ &= 4 \frac{g^2}{2} \frac{1}{2} [(\epsilon p)(\epsilon q) - (\epsilon \epsilon)(p q) + (\epsilon q)(\epsilon p)] \end{aligned} \quad (2.82)$$

(la partie en  $\gamma_5$  ne peut contribuer, car il n'y a que 3 vecteurs linéairement indépendants).



On choisit sans perdre de généralité : ( $m_e \simeq 0$ )

$$\begin{aligned}
 \epsilon^\mu &= (0, 0, 0, 1) \\
 p^\mu &= (p; 0, p \sin \alpha, p \cos \alpha) \\
 q^\mu &= (p; 0, -p \sin \alpha, -p \cos \alpha) \\
 p &= M_W/2
 \end{aligned}
 \tag{2.83}$$

et

$$\sum_{\substack{\text{spin} \\ e, \nu}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{2} M_W^2 (1 - \cos^2 \alpha)
 \tag{2.84}$$

la largeur est donnée par :

$$d\Gamma(W \rightarrow \bar{e}\nu) = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_W^\mu - p^\mu - q^\mu) |\mathcal{M}|^2 d^3p d^3q}{2\omega_W (2\pi)^3 2\omega_e (2\pi)^3 2\omega_\nu}
 \tag{2.85}$$

$d^3q$  sert à réduire  $\delta^4$  en  $\delta(M - 2p)$ ,  $d^3p$  se réduit à  $p^2 dp d\varphi d\cos \alpha$ , l'intégration sur  $d\varphi$  donne  $2\pi$ , et celle sur  $|p|$  suit :

$$\int dp \delta(M - 2p) = \frac{1}{2}
 \tag{2.86}$$

ce qui nous ramène à une intégrale évidente sur  $\cos \alpha$  :

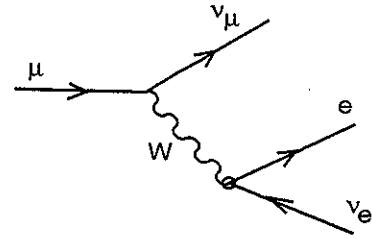
$$\Gamma(W \rightarrow e\nu) = \frac{1}{6\pi} \frac{g^2}{8} M_W
 \tag{2.87}$$

### Exercice

Effectuer le même calcul pour  $Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$ ; Si les neutrinos de toutes les familles de leptons sont de masse négligeable, on en tire une limite expérimentale sur le nombre de familles !

## 2.10. LIMITE DE BASSE ÉNERGIE

Revenant aux processus de basse énergie, on formule la désintégration du  $\mu$  dans le modèle unifié. Il y correspond le graphe :



où selon le paragraphe (2.8), le propagateur du  $W$  doit s'écrire :

$$-\frac{i(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_W^2})}{k^2 - M_W^2} \quad (2.88)$$

L'interaction effective s'écrit donc, pour  $k \rightarrow 0$ ,

$$A = \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 (-i)^2 (i) \frac{-g_{\mu\nu}}{-M_W^2} \bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} \mu \quad (2.89)$$

Comparant avec le modèle de Fermi,

$$A = (-i) \frac{4G}{\sqrt{2}} \left( \bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu \right) \left( \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \mu \right) \quad (2.90)$$

on tire :

$$\frac{g^2}{M_W^2} = \frac{8G_F}{\sqrt{2}} \quad (2.91)$$

avec

$$g^2 = e / \sin \theta_W \quad (2.92)$$

La relation (2.91) est particulièrement importante, car elle relie la masse du boson  $W$  à la valeur de la constante de Fermi  $G_F$ . De (2.91) et (2.92) on voit qu'il ne manque plus, au début des années 70 que la valeur de  $\sin \theta_W$  pour prédire la masse du boson intermédiaire  $W$ . Une détermination à basse énergie de  $\sin \theta_W$  est possible, par exemple dans la diffusion de neutrinos par courant neutre. Se basant sur les règles de Feynman données supra, on vérifiera aisément que, par exemple :

$$\frac{\sigma(\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu e)} = \frac{L_e^2 + R_e^2/3}{R_e^2 + L_e^2/3} \quad (2.93)$$

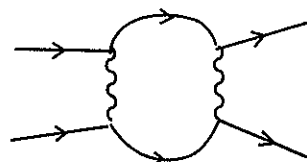
ne dépend que de  $\sin \theta_W$ .

C'est ainsi que l'on a pu, dès ce moment, faire des prévisions précises de  $M_W$ . Aujourd'hui, les relations entre diffusion à basse énergie et masse des bosons intermédiaires fournissent des tests sensibles des corrections radiatives d'ordre plus élevé.

### Remarques

Nous avons négligé le rôle du boson scalaire massif dans (2.89) et (2.93); ceci se justifie dans la mesure où son couplage est d'ordre  $\frac{m_e \sqrt{2}}{v} = g \sqrt{2} \frac{m_e}{2M_W}$ .

L'interaction effective (2.89) est dangereuse au point de vue de la renormalisabilité, on a en effet une interaction de type  $\frac{g^2}{M^2}$  pour  $k \rightarrow \infty$ ; ce qui nous ramène aux difficultés rencontrées dans le modèle de Fermi (considérer par exemple le graphe ci-contre qui semble nécessiter un contre-terme).



Cette difficulté n'est en fait qu'apparente et due à l'élimination des bosons de Goldstone (2.72). Si, à l'instar de l'électromagnétisme, on fixe d'abord la jauge par l'introduction de termes  $\frac{-1}{2\alpha}(\partial^\mu W_\mu)^2$  dans  $\mathcal{L}$  (au prix de complications techniques dont l'introduction de pseudo particules, les "ghost" de Faddeev-Popov), le propagateur s'écrit :

$$-\frac{g^{\mu\nu} - \frac{(\alpha-1)k^\mu k^\nu}{m^2 \alpha - k^2}}{k^2 - m^2}$$

ce qui restaure un comportement acceptable pour  $k \rightarrow \infty$ . La différence entre ce propagateur et (2.88) résulte du maintien du propagateur du scalaire de Goldstone. En particulier dans la jauge de Landau ( $\alpha \rightarrow 0$ ), ce propagateur en  $1/k^2$  compense le pôle apparent à  $k^2 = 0$ .

### **Exercice**

Ecrire l'équivalent de (2.89) en jauge de Landau.